Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Л.Н. МАРЧЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Курс лекций
для студентов физического факультета

В пяти частях

Часть пятая

Теория функций комплексной переменной

Гомель 2006

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я 73
М 30

Рецензенты:

Л.П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»

А.Р. Миротин, профессор, доктор физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

Марченко Л.Н.
М30 Математический анализ [текст] : [тексты лекций для студентов физического факультета. Ч.5.: Теория функций комплексной переменной] /Л.Н. Марченко: Мин-во обр. РБ. – Гомель: «УО ГГУ им. Ф. Скорины», 2006. – 131 с.

Тексты лекций разработаны в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальности «Физическая электроника». В пятой части содержится материал по темам «Теория функций комплексной переменной» и «Операционное исчисление».

Пособие адресовано студентам физического факультета.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я 73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие «Теория функций комплексного переменного» является пятой частью текстов лекций по математическому анализу для студентов физического факультета. Их содержание включает материал третьего семестра в соответствии с учебной программой по данной дисциплине. Пособие включает теоретический материал по темам «Теория функций комплексного переменного» и «Элементы операционного исчисления».

Как и в предыдущих частях, вначале каждой лекции сформулированы основные рассматриваемые вопросы, отражающие ее содержание. Далее приводятся определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, доказательства наиболее важных теорем. Теоретические положения иллюстрируются решениями задач, многие из которых имеют прикладную направленность. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, рисунков и таблиц. В конце лекции сформулированы вопрос, позволяющие обучаемому организовать самоконтроль знаний. Поскольку объем пособия не позволяет привести доказательства всех утверждений, то читателю предлагается воспользоваться учебниками, приведенными в списке литературы.

Пособие рекомендуется для использования студентами при самостоятельном изучении математического анализа, является основой для подготовки к сдаче экзаменов и зачетов.

Автор надеется, что пособие будет полезным и для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

ТЕМА 1
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Лекция 1. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Множества, области, кривые.
2. Предел последовательности.
3. Функции комплексного переменного.
4. Основные элементарные функции.

1. Множества, области, кривые. Пусть E — некоторое множество точек z на расширенной комплексной плоскости (множеству $\mathbf{C}$ принадлежит бесконечно удаленная точка).

ε-окрестностью точки z_0 называется множество точек плоскости $\mathbf{C}$, удовлетворяющих неравенству $|z_0 - z| \le \varepsilon$.

Обозначается: $U(\varepsilon; z_0) = \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |z_0 - z| \le \varepsilon \right\}$.

Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R > 0$, называется R-окрестностью бесконечно удаленной точки $z = \infty$.

Обозначается: $U(R; \infty) = \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, |z| > R > 0 \right\}$.

Комплексная плоскость вместе с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ называется расширенной расширенной комплексной плоскостью $\mathbf{C}\ (Oxy)$. Символы $x \pm i\infty$, $\pm\infty + iy$, $\infty e^{i\varphi}$ задают направления на плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$.

Точка z_0 называется ***предельной точкой*** множества E, если в любой окрестности точки z_0 расположено бесконечно много точек $z \in E$. Предельная точка z_0 может принадлежать множеству E, а может и не принадлежать ему.

Точка $z \in E$ называется ***внутренней точкой*** множества E, если существует такое $\delta > 0$, что окрестность $U(z, \delta)$ состоит только из точек множества E. Множество называется ***открытым***, если каждая точка этого множества является его внутренней точкой.

Точка z_0 расширенной комплексной плоскости называется ***граничной точкой*** множества E, если при любом $\delta > 0$ окрестность $U(\delta, z_0)$ содержит точки $z \in E$ и точки $z \notin E$. Граничная точка множества E может принадлежать самому множеству E, а может и не принадлежать ему. Совокупность всех граничных точек множества называется ***границей*** этого множества и *обозначается* ∂E. Множество E называется ***замкнутым***, если оно содержит свою границу и *обозначается*: $\overline{E}$.

Пусть t – действительная переменная, изменяющаяся в интервале $t_0 < t < T$.

Если каждому значению t из интервала $t_0 < t < T$ по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное комплексное число z, то говорят, что на интервале $t_0 < t < T$ задана ***комплексная*** (***комплекснозначная***) функция действительного переменного t и *обозначается*: $z = z(t)$.

Полагая $z(t) = x(t) + iy(t)$, можно считать, что задание функции $z(t)$ действительного переменного равносильно заданию в рассматриваемом интервале $t_0 < t < T$ двух действительных функций $x(t)$ и $y(t)$ действительного переменного t. Уравнение $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t_0 \le t \le T$, представляет собой ***параметрическое*** представление непрерывной кривой на комплексной плоскости **C** (Oxy).

Точкой самопересечения кривой $z(t) = x(t) + iy(t)$ называется точка z, для которой при $t_1 \ne t_2$ имеет место равенство $z(t_1) = z(t_2)$.

Кривой Жордана (простой кривой) называется непрерывная кривая, не имеющая точек самопересечения.

Замкнутой кривой называется простая кривая (кривая Жордана), у которой конец совпадает с началом. (Совпадение начала и конца замкнутой кривой не принято считать точкой самопересечения.) Область E, ограниченная замкнутым контуром γ, обозначается E_γ.

Кривая Жордана $z(t)$ называется ***гладкой***, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $t_0 \le t \le T$ и в каждой точке этого отрезка хотя бы одна из производных x_t', y_t'

отлична от нуля. В любой точке такой кривой существует касательная, изменяющая непрерывно свое направление от точки к точке. Кривая Жордана называется ***кусочно-гладкой***, если она состоит из конечного числа гладких кривых. Кусочно-гладкая кривая имеет касательную во всех точках, за исключением конечного числа, причем, в этих исключенных точках существуют предельные положения секущих как справа, так и слева. Точки кусочно-гладкой кривой, в которых касательная не существует, называются ***угловыми*** точками кривой.

Множество E называется ***связным*** множеством, если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству E. Связное открытое множество E называется ***областью***.

Область D называется ***односвязной***, если любой замкнутый контур γ целиком лежащий в D, ограничивает область $D_\gamma \subset D$. Это обеспечивает отсутствие дырок в области D (рис.1, а). В противном случае область называется ***многосвязной*** (рис.1,б). Это означает, что в области D найдутся контуры γ_1, γ_2, … такие, что точки из областей D_{γ_1}, D_{γ_2}, … не входят в D.

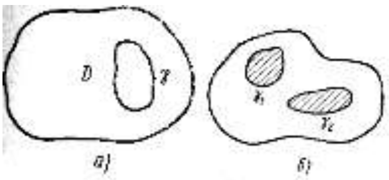


Рис.1. Односвязная (а) и многосвязная (б) область

С помощью дополнительных разрезов l_1, l_2 ... многосвязная область может быть сделана односвязной (как на рис. 2), так как в области с разрезами любой замкнутый контур γ не будет содержать внутри себя точек из областей D_{γ_1}, D_{γ_2}, …. *Положительным направлением* обхода границы области D считается то направление, при котором область D остается слева.

Рис.2. Разрезы многосвязной области

Примеры. 1. Односвязной областью является множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < R$, где z_0 – некоторая фиксированная точка комплексной плоскости, а R — некоторое положительное число, границей этой области является односвязное множество, являющееся окружностью $|z - z_0| = R$.

2. Двухсвязной областью является множество точек z, удовлетворяющих неравенству

$$R_1 < |z - z_0| < R_2,$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка комплексной плоскости, $0 < R_1 < R_2 < \infty$, граница этой области состоит из двух связных компонент: окружностей $|z - z_0| = R_1$ и $|z - z_0| = R_2$.

2. Предел последовательности. Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n = x_n + iy_n$.

Комплексное число $a = \alpha + i\beta$, $a \neq \infty$, называется ***пределом числовой последовательности*** $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всякого $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$.

Обозначается: $a = \lim\limits_{n \to \infty} z_n$.

Комплексное число $a = \infty$ называется пределом числовой последовательности $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, если $\forall R >)$ найдется такой номер $N = N(R)$, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|z_n| > R$.

Обозначается: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$.

Существование конечного предела $a = \alpha + i\beta = r\,e^{i\varphi}$ последовательности комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n = r_n e^{i\varphi_n^*}$, где

$\varphi_n^{\ *} = \arg z_n$, равносильно существованию как двух пределов вещественных последовательностей (x_n) и (y_n), а при специальной оговорке относительно главных значений аргументов $\arg z_n$, так и пределов последовательностей (r_n) и $(\varphi_n^{\ *})$.

Теорема 1. *Для того чтобы существовал конечный предел последовательности* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n = x_n + iy_n$,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = a = \alpha + i\beta ,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы последовательностей (x_n) *и* (y_n)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha , \ \lim_{n\to\infty} y_n = \beta .$$

►*Необходимость.* Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a = \alpha + i\beta$. По определению предела

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ N = N(\varepsilon): \ \forall \ n > N(\varepsilon) \qquad |z_n - a| < \varepsilon .$$

Модуль комплексного числа равен

$$|z_n - a| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} .$$

Поэтому $(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2 < \varepsilon^2$ при $n > N(\varepsilon)$.

Отсюда следуют неравенства

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon , \qquad |y_n - \beta| < \varepsilon \ \text{ при } \ n > N(\varepsilon).$$

Это означает, что существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$.

Достаточность. Пусть существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha , \ \lim_{n\to\infty} y_n = \beta .$$

По определению предела

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \ \Leftrightarrow \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ N_1 = N_1(\varepsilon): \ \forall \ n > N_1(\varepsilon) \quad |x_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} ,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \beta \ \Leftrightarrow \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ N_2 = N_2(\varepsilon): \ \forall \ n > N_2(\varepsilon) \quad |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} .$$

Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall \ n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|z_n - a| = \sqrt{(x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2} < \varepsilon .$$

Отсюда следует, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a = \alpha + i\beta$.◄

Теорема 2. *Для того чтобы существовал конечный предел* $a = \alpha + i\beta = r\,e^{i\varphi}$, $r \neq 0$, *последовательности* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n = x_n + iy_n = r_n e^{i\varphi_n^*}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал предел* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, *а при надлежащем выборе области главных значений аргументов* (φ_n^*) *и* φ^* *предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n^* = \varphi^*$.

Без доказательства.

Теорема 3 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *комплексных чисел была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал номер* $N = N(\varepsilon)$ *такой, что для всякого* $n > N(\varepsilon)$ *и* $p = 1,2,...$ *справедливо неравенство* $\left|z_{n+p} - z_n\right| < \varepsilon$.

Все действия с пределами последовательностей комплексных чисел аналогичны действиям с последовательностями действительных чисел.

2. Функции комплексного переменного. Пусть E есть некоторое множество точек, расположенных на расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$ (к E может принадлежать и бесконечно удаленная точка).

Если каждому комплексному числу z, принадлежащему множеству E, по некоторому правилу f поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w (к ним может принадлежать и $w = \infty$), то говорят, что на множестве E ***задана функция.*** При этом точки $z \in E$ представляют значения независимой переменной (или аргумента), а точки w – значения функции.

Обозначается: $w = f(z)$.

Если каждому $z \in E$ соответствует одно определенное значение w, то функция $w = f(z)$ называется ***однозначной***; в противном случае функция $w = f(z)$ называется ***многозначной***. Множество E называется ***областью определения*** функции $w = f(z)$, а совокупность E' всех значений w, которые функция $f(z)$ принимает на E, называется ***множеством значений*** функции $f(z)$. Геометрически функцию $w = f(z)$, заданную на E можно рассматривать как отображение области E

плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$ на некоторую область $E^{'}$ плоскости $\mathbf{W}\,(O^{'}uv)$ (рис.3). Обратное отображение определяет обратную функцию $z=\varphi(w)$.

Если функция $w_1 = f(z)$ отображает область $E \subset \mathbf{C}$ на область $E_1 \subset \mathbf{W}_1$, а функция $w = g(w_1)$ отображает область E_1 на область $G \subset \mathbf{W}$, то сложная функция $w = g\left(f(z)\right)$ осуществляет отображение области $E \subset \mathbf{C}$ на $G \subset \mathbf{W}$.

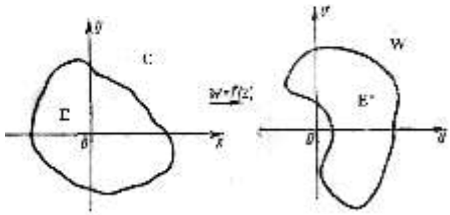


Рис.3.Задание функции комплексного переменного

Функция $w = f(z)$ называется ***однолистной*** на множестве E, если она однозначна и в различных точках $z_1 \neq z_2$ множества E принимает различные значения $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Функция $w = f(z)$ может быть записана в виде

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где $u = u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ – ***действительная часть функции*** $f(z)$, $v = v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ – ***мнимая часть функции*** $f(z)$.

Пример. Пусть $w = z^3$, где $z = x + iy$. Найти $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$.

Решение. Имеем

$$w = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3).$$

Отсюда $u(x,y) = \operatorname{Re} z^3 = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = \operatorname{Im} z^3 = 3x^2 - y^3$.

4. Предел и непрерывность. Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки z_0 комплексной плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$, кроме, быть может, самой точки z_0.

Комплексное число A называется ***пределом*** функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall z \ \ 0 < |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - A| < \varepsilon .$$

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0 расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$.

Функция $f(z)$ называется ***бесконечно малой*** при $z \to z_0$, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$.

Теорема 4 (Критерий Коши существования конечного предела функции). *Для существования конечного предела* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$*, что для любых точек* z' *и* z''*, принадлежащих области определения функции* $f(z)$ *и удовлетворяющих неравенствам* $0 < |z' - z_0| < \delta$, $0 < |z'' - z_0| < \delta$ *выполняется неравенство* $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$.

Без доказательства

Теорема 5. *Пусть функция* $f(z) = u(x, y,) + iv(x, y)$ *определена и конечна в некоторой окрестности точки* $z_0 = x_0 + iy_0$ *и* $A = u_0 + iv_0$. *Тогда для того, чтобы* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0 .$$

►*Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $z_0 \neq \infty$, $A \neq \infty$. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Так как

$$|u(x, y) - u_0| \leq |f(z) - A|, \quad |v(x, y) - v_0| \leq |f(z) - A|,$$

$$\left|x - x_0\right| \le \left|z - z_0\right|, \quad \left|y - y_0\right| \le \left|z - z_0\right|,$$

то из неравенства $\left|f(z) - A\right| < \varepsilon$ при условии $0 < \left|z - z_0\right| < \delta$ следует справедливость неравенств

$$\left|u(x, y) - u_0\right| < \varepsilon, \qquad \left|v(x, y) - v_0\right| < \varepsilon$$

при условии $0 < \left|x - x_0\right| < \delta$, $0 < \left|y - y_0\right| < \delta$.

Это означает, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$.

Достаточность. Пусть имеют место соотношения $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что справедливы неравенства

$$\left|u(x, y) - u_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|v(x, y) - v_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при условии

$$0 < \left|x - x_0\right| < \frac{\delta}{2}, \quad 0 < \left|y - y_0\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Так как

$$\left|f(z) - A\right| = \left|u(x, y) + iv(x, y) - (u_0 + iv_0)\right| \le \left|u(x, y) - u_0\right| + \left|v(x, y) - v_0\right|$$

и

$$\left|z - z_0\right| = \left|x + iy - (x_0 + iy_0)\right| \le \left|x - x_0\right| + \left|y - y_0\right|,$$

то имеем $\left|f(z) - A\right| < \varepsilon$, если $0 < \left|z - z_0\right| < \delta$.

Отсюда следует, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$. ◄

Теоремы о пределах для функций нескольких действительных переменных остаются справедливыми и для функций комплексного переменного.

Теорема 6. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют конечные пределы при $z \to z_0$ (z_0 — конечно, либо $z_0 = \infty$), то имеют место следующие соотношения*:

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} g(z),$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} \text{ при } g(z)\neq 0 .$$

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки z_0, включая и саму точку z_0.

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной*** в точке z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Пусть $\Delta z = z - z_0$ приращение аргумента, то величина $\Delta f(z_0)=f(z)-f(z_0)$ есть приращение функции. Тогда определение непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0 можно записать так: $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta f(z)=0$. Отсюда следует, что функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной в области*** $E\subseteq \mathbf{C}\ (Oxy)$, если она непрерывна в каждой точке $z\in E$.

Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области E.

Функция $f(z)$ называется ***равномерно непрерывной в области*** E, если для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых двух точек z' и z'', принадлежащих области E, расстояние между которыми $|z'-z''|<\delta$, выполняется неравенство $|f(z')-f(z'')|<\varepsilon$.

Очевидно, что всякая равномерно непрерывная функция в области E является непрерывной функцией в этой области. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: непрерывная функция в области E может и не обладать свойством равномерной непрерывности.

Теорема 7 (Кантора). *Если $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{E}$, то она непрерывна в этой области.*

Без доказательства.

5. Основные элементарные функции. Рассмотрим основные элементарные функции комплексного переменного $z=x+iy$.

Функция $w=z^n$, $n=2,3,\ldots$, называется ***степенной*** функцией. Степенная функция $w=z^n$ определена и однозначна на всей расширенной плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$. Точке $z=\infty$ ставится в соответствие точка $w=\infty$.

Дробно-линейной функцией называется функция вида

$$w=\frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d – постоянные, $ad-bc\neq 0$.

Условие $ad-bc\neq 0$ накладывается для того, чтобы исключить случай вырождения функции в постоянную. При $ad-bc=0$ дробно-линейная функция принимает вид $w=\dfrac{a}{c}$.

При $c=0$ получаем функцию $w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$, которая называется ***целой линейной функцией.***

При $a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=0$ имеем $w=\dfrac{1}{z}$.

Дробно-линейная функция $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ определена и однозначна на расширенной плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$: при $c\neq 0$ каждой точке z ($z\neq -\dfrac{d}{c}$, $z\neq\infty$) становится в однозначное соответствие конечная точка w на плоскости $\mathbf{W}\ (O'uv)$. Точке $z=-\dfrac{d}{c}$ соответствует точка $w=\infty$, точке $z=\infty$ – точка $w=\dfrac{a}{c}$.

Функция $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ также всюду определена на расширенной плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$: любому конечному z ставится в однозначное соответствие конечное w; точке $z=\infty$ – точка $w=\infty$.

Показательной функцией комплексного переменного называется функция вида $w=e^z$.

Положим $z=x+iy$, $w=u+iv$. Тогда имеем

$$w=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Отсюда находим $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$.

Показательная функция обладает следующими ***свойствами***:

1) показательная функция $w=e^z$ определена во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$;

2) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$;

3) формулы Эйлера $e^{iz}=\cos z+i\sin z$, $e^{-iz}=\cos z-i\sin z$;

4) $e^{z+2\pi i}=e^z$, т.е. показательная функция $w=e^z$ $2\pi i$ периодичная;

5) $\lim\limits_{\operatorname{Re} z\to-\infty} e^z=0$, $\lim\limits_{\operatorname{Re} z\to+\infty} e^z=\infty$.

Показательная форма комплексного числа $z=r\cdot e^{iArgz}$.

Очевидно, что $e^{2k\pi i}=1$.

Тригонометрические функции определяются из формул Эйлера

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Тригонометрические функции $\cos z$, $\sin z$ комплексного переменного являются периодическими с действительным периодом 2π; $\cos z=0$ в точках $z=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, $\sin z=0$ в точках $z=\pi n$, где $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Отношение $\frac{\sin z}{\cos z}$, $z\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$,называется ***тангенсом*** z:

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}.$$

Отношение $\frac{\cos z}{\sin z}$, $z\neq\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, называется ***котангенсом*** z:

$$ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Все тригонометрические тождества для тригонометрических функций комплексного переменного аналогичны тождествам тригонометрических функций действительного переменного.

Гиперболическими функциями называются функции, определяемые равенствами

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\ \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\ \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Гиперболические и тригонометрические функции связаны между собой соотношениями:

$$\operatorname{sh} z = -i \cdot \sin iz, \qquad \sin z = -i \operatorname{sh} iz,$$
$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \qquad \cos z = \operatorname{ch} iz,$$
$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \qquad \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz,$$
$$\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz, \qquad \operatorname{ctg} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

Для гиперболических функций существуют тождества, аналогичные тригонометрическим тождествам.

Функция, обратная к функции $w = e^z$ называется ***логарифмической*** и обозначается

$$z = \operatorname{Ln} w.$$

Изменяя обозначения w на z и z на w, имеем $w = \operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$. Каждое значение функции $w = \operatorname{Ln} z$ называется ***логарифмом*** комплексного числа.

Логарифмическая функция определена во всех точках комплексной плоскости $\mathbf{C}$ (Oxy) кроме точки $z = 0$.

Правила о логарифме произведения, частного, степени и корня для положительных чисел справедливы и для комплексных чисел.

Пусть $w = \operatorname{Ln} z = u + iv$, $z = re^{i\varphi} = |z|e^{i \operatorname{Arg} z}$. Тогда согласно определения логарифмической функции, получаем $e^{u+iv} = |z|e^{i \operatorname{Arg} z}$. Отсюда $e^u = |z|$, $v = \operatorname{Arg} z$. Следовательно $u = \ln|z|$, $v = \operatorname{Arg} z$. Таким образом,

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Значение функции, которое получается при $k = 0$, называется ***главным значением*** и обозначается

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \ \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z, \ \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

Общая степенная функция $w = z^\alpha$, где α – любое комплексное число, определяется соотношением $z^\alpha = e^{\alpha \cdot \operatorname{Ln} z}$, $z \neq 0$. Эта функция многозначна, значение $z^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \ln z}$ называется ***главным значением***.

Общая показательная функция $w = \alpha^{z}$, $\alpha \neq 0$, определяется равенством $\alpha^{z} = e^{z \cdot \mathrm{Ln}\, z}$. Главное значение этой функции $\alpha^{z} = e^{z \cdot \ln z}$.

Функции $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$, $\mathrm{Arctg}\, z$, $\mathrm{Arcctg}\, z$ определяются как обратные функции к функциям $\cos z$, $\sin z$, $\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{ctg}\, z$ соответственно. Эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции:

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\, \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^{2}} \right), \ \mathrm{Arccos}\, z = -i\, \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{z^{2} - 1} \right),$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2} \mathrm{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right), \ \mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2} \mathrm{Ln}\left(\frac{z - i}{z + i} \right).$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z$, $\arccos z$, $\mathrm{arctg}\, z$, $\mathrm{arcctg}\, z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмов.

Обратные гиперболические функции выражаются через логарифмические функции по следующим формулам:

$$\mathrm{Arcsh}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^{2} + 1} \right), \ \mathrm{Arcch}\, z = \mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^{2} - 1} \right),$$

$$\mathrm{Arcth}\, z = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}\left(\frac{1 + z}{1 - z} \right), \ \mathrm{Arccth}\, z = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}\left(\frac{z + 1}{z - 1} \right).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется окрестностью точки на комплексной плоскости?

2. Какие множества комплексной плоскости называются областью?

3. Какие множества комплексной плоскости называются связными?

4. Дайте определение функции комплексного переменного.

5. Сформулируйте определение предела функции комплексного переменного.

6. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования предела функции комплексного переменного.

7. Какие функции называются непрерывными?

8. Назовите основные элементарные функции комплексного переменного.

Лекция 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Определение производной.
2. Условия Коши-Римана.
3. Сопряженные гармонические функции.

1. Определение производной. Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки z комплексной плоскости **C** (Oxy), включая и саму точку.

Определение 1. ***Производной*** функции $f(z)$ в точке z называется предел (если он существует (конечный))

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z).$$

Приращение Δz стремится к нулю любым образом, т.е. точка $z+\Delta z$ приближается к точке z по любому из бесконечного множества различных направлений.

Определение 2. Функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** z, если ее приращение $\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)$ представимо в виде

$$\Delta f(z)=C\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z,$$

где $\alpha(\Delta z)\to 0$ при $\Delta z\to 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы приращение $\Delta f(z)$ функции $f(z)$ в этой точке могло быть представлено в виде*

$$\Delta f=f'(z)\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z.$$

►*Необходимость.* Так как функция дифференцируема, то ее приращение может быть представлено в виде

$\Delta f(z)=c\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z$, где c – постоянная величина, $\alpha(\Delta z)\to 0$ при $\Delta z\to 0$.

Отсюда

$$c=\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}-\alpha(\Delta z).$$

Переходя к пределу при $\Delta z\to 0$, получим $c=f'(z)$.

Достаточность. Поскольку функция $w=f(z)$ имеет производную, то существует предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=f'(z)$.

Значит, можно записать $f'(z)=\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}+\alpha(\Delta z)$. Отсюда получаем

$$\Delta f(z)=f'(z)\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z\,. \blacktriangleleft$$

Условие дифференцируемости равносильно условию

$$\Delta f(z)=f'(z)\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z)\cdot\Delta z\,.$$

Из определения 2 следует непрерывность функции $f(z)$ в точке z. Таким образом, всякая дифференцируемая функция $f(z)$ в точке z непрерывна в этой точке. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно: существуют примеры функций комплексного переменного непрерывных на всей комплексной плоскости и не имеющих производных либо всюду в комплексной плоскости, либо в отдельных точках.

Пример. Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=\bar{z}=x-iy$.

Решение. Рассматриваемая функция непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Для данной функции при любом z имеем $\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$.

Отсюда следует:

если $\Delta y=0$, т. е. $\Delta z=\Delta x\neq 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta z}=1$;

если $\Delta x=0$, т. е. $\Delta z=i\cdot\Delta y\neq 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta z}=-1$.

Следовательно, отношение $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ предела не имеет ни при каком z. Функция $f(z)=\bar{z}$, непрерывная на всей комплексной плоскости, не имеет производной ни в одной точке плоскости.

Определение 3. Величина $f'(z)\Delta z$, линейная относительно Δz, называется ***дифференциалом*** функции $f(z)$.

Обозначается: $df(z)=f'(z)\Delta z$.

В частности, при $f(z)=z$, из последнего равенства находим $dz=\Delta z$, т. е. дифференциал независимого переменного совпадает с его приращением.

Заменяя в равенстве $df(z)=f'(z)\Delta z$ приращение Δz на dz, получим

$$df(z)=f'(z)dz.$$

Таким образом, дифференциал дифференцируемой функции равен произведению ее производной на дифференциал независимого переменного.

2. Условия Коши — Римана. Пусть $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ однозначная функция комплексного переменного $z=x+iy$, определенная в области E. Если функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ двух действительных переменных x и y заданы в области E независимо друг от друга, то функция $f(z)$ может и не быть дифференцируемой в этой области. Функция $f(z)=\bar{z}=x-iy$ не дифференцируема всюду на комплексной плоскости. Однако каждая из этих функций $u(x;y)=x$, $v(x;y)=-y$ имеет во всей комплексной плоскости частные производные по x и y.

Для того чтобы функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ была дифференцируемой в точке $z=x+iy$, на действительную часть $u(x;y)$ и при мнимая часть $v(x;y)$ функции $f(z)$ должны быть наложены некоторые ограничения.

Теорема 2. *Для того чтобы функция* $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ *была дифференцируемой в точке* $z=x+iy$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* $u(x;y)$ *и*

$v(x;y)$ были дифференцируемы в точке $(x;y)$ как функции двух действительных переменных x и y, и выполнялись условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

►*Необходимость*. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, т.е. существует производная $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$.

Поскольку предел не зависит от пути, по которому $\Delta z\to 0$, то предположим, что Δz действительное число, т.е. $\Delta z=\Delta x$, $\Delta y=0$ (рис.1).

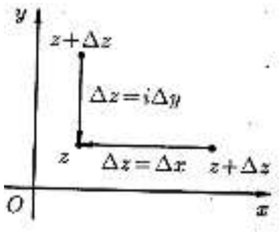


Рис.1.

Тогда

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)]-[u(x;y)+iv(x;y)]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)-u(x;y)]+i[v(x+\Delta x,y)-v(x;y)]}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Предположим теперь, что Δz мнимое число, т.е. $\Delta z=i\Delta y$, $\Delta x=0$. Тогда

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)]-[u(x;y)+iv(x;y)]}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)-u(x;y)]+i[v(x+\Delta x,y)-v(x;y)]}{i\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Сравнивая полученные пределы, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Отсюда имеем $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

Достаточность. Пусть в некоторой окрестности точки z выполнены условия

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Докажем, что $f(z)$ дифференцируема.

Так как по условию функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы, то их полные приращения могут быть представлены в виде

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1|\Delta z|,$$

$$\Delta u=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_2|\Delta z|,$$

где $|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $\alpha_1\to 0$, $\alpha_2\to 0$ при $\Delta z\to 0$.

Поскольку $\Delta f=\Delta u+i\Delta v$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, то

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1|\Delta z|+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_2|\Delta z|\right)}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta x+i\Delta y}+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+i\left(i\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+(\alpha_1+i\alpha_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}.$$

Отсюда следует, что $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ существует. При этом

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.\ \blacktriangleleft$$

Учитывая условия Коши-Римана, производную можно записывать в одной из следующих форм

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\ f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x},\ \ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Пример. Исследовать функцию $w=z^2$ на дифференцируемость и найти ее производную.

Решение. Пусть $z=x+iy$. Тогда

$$z^2=(x+iy)^2=\left(x^2-y^2\right)+2ixy.$$

Следовательно. $u(x;y)=x^2-y^2$, $v(x;y)=2xy$.

Условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполняются в любой точке $(x;y)$. Значит, функция $w=z^2$ дифференцируема на всей комплексной плоскости.

Тогда $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+2iy=2(x+iy)=2z$.

Определение 4. Однозначная функция $w=f(z)$ называется ***аналитической*** в области E, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Замечание. Функция $w=f(z)$, аналитическая в области E, имеет в каждой точке $z\in E$ производные любого порядка.

Поскольку свойства алгебраических действий и правила предельного перехода для функций действительного переменного распространяются и на функцию комплексного переменного, то правила дифференцирования функций действительного переменного справедливы и для функции комплексного переменного:

$$(f(z)+g(z))'=f'(z)+g'(z),$$

$$(f(z)\cdot g(z))'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)},\ g(z)\neq 0,$$

$$(f(g(z)))'=f_g'\cdot g'(z),$$

$$f'(z)=\frac{1}{\left(f^{-1}(z)\right)'}.$$

3. Сопряженные гармонические функции.

О п р е д е л е н и е 5. Функция $g(x;y)$ действительных переменных x и y называется гармонической в области $D\subseteq\mathbf{R}^2$, если она дважды дифференцируема и ее частные производные $\dfrac{\partial^2 g(x;y)}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y^2}$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y^2}=0.$$

Теорема 3. *Если функция* $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ *аналитическая в области* E*, то* $u(x;y)$ *и* $v(x;y)$ *являются гармоническими в области* E.

► Пусть функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ – аналитическая в некоторой области E комплексной плоскости, т.е. имеет производную в каждой точке z области E. Тогда действительная часть $u(x;y)$ и коэффициент при мнимой части $v(x;y)$ функции $f(z)$ имеют частные производные по переменным x и y в каждой точке $(x;y)$ области E. Значит, функция $f(z)$, аналитическая в области E, имеет в каждой точке z области E непрерывные производные любого порядка. Отсюда следует, что функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ имеют в каждой точке z области E непрерывные частные производные любого порядка по переменным x и y, в частности второго порядка.

С другой стороны, функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ в любой точке $(x;y)$ области E удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u(x;y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x;y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x;y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x;y)}{\partial x}$$

Дифференцируя первое из равенств по x, а второе из равенств – по y, получим

$$\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial^2 y}=-\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial y\partial x}.$$

Складывая почленно эти равенства, найдем

$$\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial^2 y}=0,\ (x;y)\in E.$$

Равенство вторых смешанных частных производных следует из их непрерывности.

Далее, дифференцируя первое из равенств по y, а второе из равенств по x получим

$$\frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial^2 x}, \quad \frac{\partial^2 u(x;y)}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial^2 y}.$$

Вычитая почленно найденные равенства, имеем

$$\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial^2 y} = 0, \ (x;y) \in E. \blacktriangleleft$$

Замечание. Обратное верно не всегда: если взять за $u(x;y)$ и $v(x;y)$ две произвольные функции, гармонические в области E, то функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ не всегда будет аналитической в этой области, так как две произвольно взятые гармонические функции не всегда удовлетворяют условиям Коши-Римана.

Определение 6. Две гармонические в области E функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$, связанные в области E условиями Коши–Римана, называются ***сопряженными***.

Теорема 4. *Пусть E односвязная область и функция $u(x;y)$ гармоническая в области E. Тогда существует такая сопряженная ей гармоническая функция $v(x;y)$, определенная с точностью до постоянного слагаемого, что функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ является аналитической.*

Без доказательства.

Пример. Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$, если $v(x;y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ при условии $f(0) = 0$.

Решение. Функция $v(x;y)$ является гармонической на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, так как

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6x + 12y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6x - 12y.$$

Частные производные первого порядка равны

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 - 6xy - 6y^2.$$

Отсюда

$$u(x;y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)}\left(6x2-6xy-6y^2\right)dx+\left(-3x^2-12xy+3y^2\right)dy+c=$$

$$=2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3+c$$

Тогда

$$f(z)=\left(2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3\right)+i\left(x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3\right)=$$

$$(x+iy)^3\cdot(2+i)=(2+i)z^3.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение производной функции в точке.

2. Какая функция называется дифференцируемой? Сформулируйте необходимой и достаточное условия дифференцируемости функции.

3. Что называется дифференциалом функции комплексного переменного?

4. В чем заключаются условия Коши-Римана?

5. Какая функция называется аналитичной?

6. Какие функции называются гармоническими? Является ли аналитическая функция гармонической?

Лекция 3. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1. Геометрический смысл модуля производной.
2. Геометрический смысл аргумента производной.
3. Понятие конформного отображения.

1. Геометрический смысл модуля производной. Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в некоторой точке $z_0 \in E$ комплексной плоскости **C** (Oxy), причем $f'(z_0) \neq 0$. Функция $w = f(z)$ отображает точку z_0 в точку $w_0 = f(z_0)$ на комплексной плоскости **W** $(O'uv)$.

Пусть произвольная точка $z = z_0 + \Delta z$ из окрестности точки z_0 перемещается к точке z_0 по некоторой непрерывной кривой γ. Тогда в плоскости **W** $(O'uv)$ соответствующая точка $w = w_0 + \Delta w$ перемещается к точке w_0 по некоторой кривой Γ, являющейся отображением кривой γ в плоскости **W** $(O'uv)$ (см. рис.1).

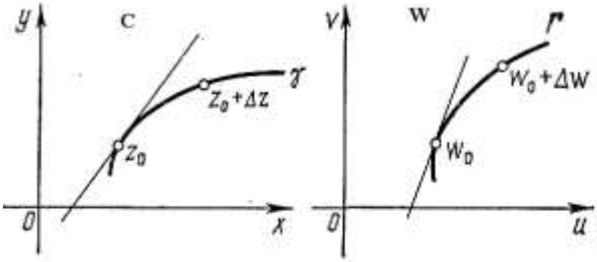


Рис.1. геометрический смысл модуля производной

По определению производной $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$.

Отсюда следует, что

$$|f'(z_0)| = \left|\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

Величина $|\Delta z| = |z - z_0|$ есть расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta w|$ – расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$. Следовательно, $|f'(z_0)|$ есть предел отношения бесконечно малого расстояния между отображенными точками w_0 и $w_0+\Delta w$ к бесконечно малому расстоянию z_0 и $z_0+\Delta z$. Этот предел в силу аналитичности функции $w=f(z)$ не зависит от выбора кривой γ, проходящей через точку z_0.

Поэтому величина $\left|f'(z_0)\right|=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ является постоянной в точке z_0 (постоянной во всех направлениях) и определяет коэффициент подобия в точке z_0 при отображении $w=f(z)$. При $\left|f'(z_0)\right|>1$ модуль производной $\left|f'(z_0)\right|$ называется коэффициентом растяжения, при $\left|f'(z_0)\right|<1$ модуль производной $\left|f'(z_0)\right|$ называется *коэффициентом сжатия*.

2. Геометрический смысл аргумента производной. Для аргумента производной в точке z_0 имеем

$$\arg f'(z_0)=\arg\left(\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\arg\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\arg\Delta w-\arg\Delta z\right)=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\arg\Delta w-\arg\Delta z\right)=\alpha_1-\alpha_2,$$

где α_1 и α_2 – углы, которые образуют касательные к кривым γ и Γ соответственно в точках z_0 и w_0 с положительными направлениями действительных осей плоскостях $\mathbf{C}\ (Oxy)$ и $\mathbf{W}\ (O'uv)$ (рис.2).

Отсюда

$$\alpha_2=\alpha_1+\arg f'(z_0).$$

Значит, $\arg f'(z_0)$ – это угол, на который надо повернуть нсательную к кривой γ в точке z_0 для того, чтобы получить направление касательной к кривой Γ в точке w_0. При этом, если $\arg f'(z)>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, если $\arg f'(z)<0$ – по часовой.

Для другой пары кривых Γ_1 и γ_1 в тех же точках w_0 и z_0 имеем

$$\arg f'(z_0)=\beta_1-\beta_2,$$

где β_1 и β_2 – углы, которые образуют касательные к кривым γ_1 и Γ_1 соответственно в точках z_0 и w_0 с положительными направлениями действительных осей плоскостях $\mathbf{C}\,(Oxy)$ и $\mathbf{W}\,(O'uv)$ (рис.2).

Очевидно, что $\arg f'(z_0) = \beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$.

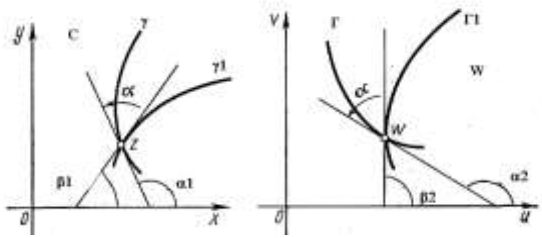


Рис.2. Геометрический смысл аргумента производной

Следовательно, если кривые γ и γ_1 образуют в точке z_0 плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$ угол θ, то такой же угол θ будут образовывать в точке w_0 кривые Γ и Γ_1 в плоскости $\mathbf{W}\,(O'uv)$.

3. Понятие конформного отображения.

Определение 1. Отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, называется ***конформным*** (***конформным отображением первого рода***) в точке z_0, если оно обладает свойством сохранения углов и постоянством растяжений в точке z_0.

Теорема 1. *Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда отображение $w = f(z)$ является конформным в точке z_0.*

Без доказательства.

Определение 2. Отображение, осуществляемое функцией $w = f(z)$, называется ***антиконформным*** (***конформным отображением второго рода)*** в точке z_0, если оно в точке z_0 обладает постоянством растяжений, свойством сохранения величин углов, но изменяет направление отсчета углов на нна ивоположное.

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области E плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$.

О п р е д е л е н и е 3. Взаимно однозначное отображение $w = f(z)$ называется ***конформным*** в области E, если оно конформно в каждой точке области E.

Теорема 2 (критерий конформности). *Для того, чтобы функция $w = f(z)$ являлась конформным отображением, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была 1) однолистной, 2) нналитической, 3) $f'(z) \neq 0$ всюду в области E.*

Без доказательства.

Пример. Выяснить геометрическую картину отображения, осуществляемого функцией $w = 5z$.

Р е ш е н и е. Поскольку $w' = 5 \neq 0$, то отображение $w = 5z$ является конформным во всех точках плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$. Модуль производной $|f'(z_0)| = 5 > 1$, значит, происходит растяжение при отображении. Аргумент производной равен $\arg f'(z) = 0$, поэтому направление при отображении не меняется.

Теорема 3 (Римана). *Всякую односвязную область E плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости $\mathbf{W}\ (O'uv)$, причем отображение будет единственным при выполнении условий*

$$f(z_0) = 0,\ \ \arg f'(z_0) = \alpha,\ z_0 \in E,\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Теорема 4 (принцип взаимно однозначного соответствия границ). *Пусть в ограниченной односвязной области $E \subseteq \mathbf{C}\ (Oxy)$ с контуром γ задана аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная в $\overline{E}$ и осуществляющая взаимнооднозначное отображение контура γ на некоторый контур Γ плоскости $\mathbf{W}\ (O'uv)$. Тогда, если при заданном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция $w = f(z)$, осуществляет конформное отображение E на внутреннюю область $E' \subseteq \mathbf{W}\ (O'uv)$, ограниченную контуром Γ.*

Без доказательства.

Пример. Найти область E', в которую функция $w = z^2$ конформно отображает круг $\left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$.

Решение. В полярных координатах $r,\ \varphi$ уравнение окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ принимает вид $r=\cos\varphi$.

Обозначим через $\rho,\ \theta$ полярные координаты в плоскости **W** $\left(O'uv\right)$. При данном отображении $w=z^2$ справедливы равенства

$$\rho=r^2,\quad \theta=2\varphi$$

Тогда при отображении $w=z^2$ окружность $r=\cos\varphi$ переходит в кардиоиду

$$\rho=\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta),$$

причем сохраняется направление обхода окружности $r=\cos\varphi$ и кардиоиды $\rho=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$. На основании принципа взаимно однозначного соответствия границ заключаем, что функция $w=z^2$ осуществляет конформное отображение внутренности рассматриваемой окружности на внутренность кардиоиды (рис.3).

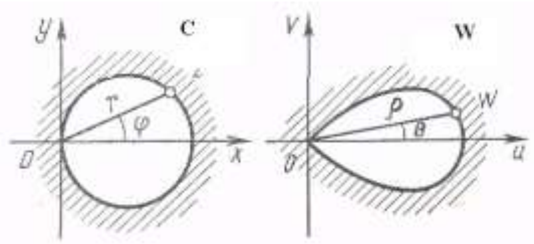


Рис.3.

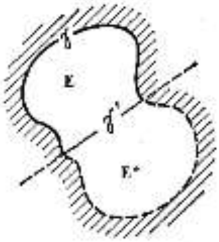


Рис.4.

Пусть область E содержит в составе своей границы прямолинейный отрезок γ (конечной или бесконечной длины).

Определение 4. Область E^*, полученная зеркальным отражением области E относительно прямой, на которой лежит отрезок γ' (относительно отрезка γ'), называется областью, ***симметричной*** области E относительно γ' (рис.4.).

Теорема 5 (принцип симметрии Римана — Шварца). *Пусть* $E \subseteq \mathbf{C}\,(Oxy)$ *– область, ограниченная кривой* γ, *содержащей прямолинейный отрезок* γ'. *На множестве* $E \cup \gamma'$ *определена непрерывная функция* $w = f(z)$, *осуществляющая конформное отображение области* E *на область* G *плоскости* $\mathbf{W}\,(O'uv)$, *при котором прямолинейный отрезок* γ' *границы* γ *переходит в прямолинейный отрезок* Γ' *границы* Γ *области* G. *В точках* $z^* \in E^* \cup \gamma'$ *определена функция* $f^*(z^*)$ *по следующему правилу: 1) точка* $f^*(z^*)$ *симметрична точке* $f(z)$ *относительно отрезка* Γ', *если* $z^* \in E^*$ *симметрична точке* $z \in E$ *и 2)* $f^*(z^*) = f(z)$, *если* $z^* = z \in \gamma'$. *Тогда функция* $f^*(z^*)$ *является аналитической в области* E^* *и конформно отображает область* E^* *на область* G^*, *симметричную с областью* G *относительно* Γ'. *При этом функция*

$$w = f(z) = \begin{cases} f(z), \text{ если } z \in E, \\ f(z) = f^*(z^*), \text{ если } z^* = z \ (z \in \gamma'), \\ f^*(z^*), \text{ если } z^* \in E^* \end{cases}$$

осуществляет конформное отображение области $E \cup \gamma' \cup E^*$ *на область* $G \cup \Gamma' \cup G^*$.

Следствие. *Если* λ' *и* Γ' *отрезки действительных осей, то* $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

Пример. Пусть область $E \subseteq \mathbf{C}\,(Oxy)$ представляет собой внешность объединения отрезков $[-1;1]$ и $[-i;i]$ (рис.5). Обозначим через E_1 верхнюю половину области E ($\operatorname{Im} z > 0$). Граница γ области E_1 содержит в своем составе отрезок γ', действительной оси плоскости $\mathbf{C}\,(Oxy)$, соединяющий через ∞ точки ± 1. Функция $w = \sqrt{z^2 + 1}$ $(0 < \arg z < \pi)$ отображает область E_1 на верхнюю полуплоскость G_1 комплексной плоскости $\mathbf{W}\,(O'uv)$. При этом отрезок γ' переходит в отрезок Γ' действительной оси плоскости $\mathbf{W}\,(O'uv)$, соединяющий через ∞ точки $w = \pm\sqrt{2}$. Областью E^*_1, симметричной области E_1 относительно γ', является нижняя полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ с выброшенным интервалом $(0,-i]$. Областью, симметричной области G_1 относительно отрезка Γ', будет область G^*_1, представляющая нижнюю полуплоскость $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$ ($\operatorname{Im} w < 0$). Тогда, согласно принципу симметрии, функция $w = \sqrt{z^{*2} + 1}$, $\pi < \arg z^* < 2\pi$, $z^* \in E_1$, конформно отображает область E^*_1 на область G^*_1 плоскости $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$.

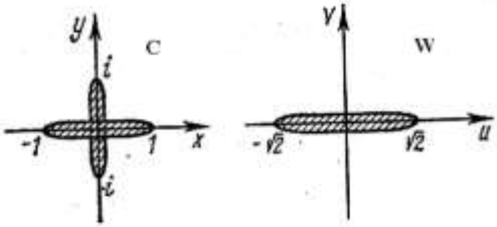


Рис.5.

Таким образом, функция $w = \sqrt{z^2 + 1}$, $z \in E$ конформно отображает область E на область G, представляющую внешность отрезка $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$ комплексной плоскости $\mathbf{W}\left(O'uv\right)$, и при $z \in \gamma'$ значения $w \in \Gamma'$.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит геометрический смысл модуля производной?
2. В чем состоит геометрический смысл аргумента производной?
3. Какое отображение называется конформным?
4. Сформулируйте основные принципы конформномти.

Лекция 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Определение интеграла.
2. Связь интеграла комплексной переменной с криволинейным интегралом второго рода.
3. Свойства интегралов по комплексному переменному.
4. Основная теорема Коши.

1. Определение интеграла. Пусть $w = f(z)$ — однозначная функция комплексного переменного z, определенная на некоторой гладкой кривой Γ с началом в точке z_0 и концом в точке z_1. Кривая Γ может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Направление движения по кривой Γ от начальной точки z_0 к конечной точке z_1 называется ***положительным*** направлением на кривой Γ и обозначается через Γ^+. Противоположное направление на кривой Γ называется ***отрицательным*** и обозначается Γ^-.

Разобьем кривую Γ на n частичных дуг произвольно выбранными точками ξ_0, ξ_1, ξ_2, …, ξ_{n-1}, ξ_n, причем $\xi_0 = z_0$, $\xi_n = z_1$, расположенными последовательно в положительном направлении кривой Γ (рис. 1).

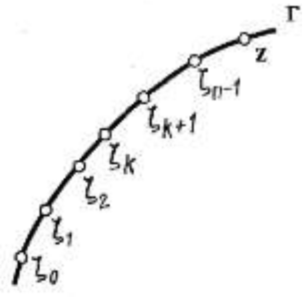


Рис.1. Разбиение кривой Γ

На каждой частичной дуге $\xi_k\xi_{k+1}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$, выберем произвольную точку ξ_κ^* и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_\kappa ,$$

где $\Delta\xi_\kappa = \xi_{\kappa+1} - \xi_\kappa$.

Определение 1. Комплексное число J называется ***пределом*** интегральных сумм $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_\kappa$, при $\max\left|\Delta\xi_\kappa\right| \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любом разбиении кривой Γ на частичные дуги $\xi_k\xi_{k+1}$, $k = 0,1,\cdots,n-1$, и при любом выборе точек ξ_κ^* на частичных дугах $\xi_\kappa\xi_{\kappa+1}$ имеет место неравенство $\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_\kappa^*)\Delta\xi_\kappa - J\right| < \varepsilon$ при $\max\left|\Delta\xi_\kappa\right| < \delta$.

Определение 2. Предел интегральных сумм $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_\kappa$ при $\max\left|\Delta\xi_\kappa\right| \to 0$, если он существует, называется ***интегралом от функции*** $f(z)$ ***вдоль кривой*** Γ (в выбранном направлении).

Обозначается:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{\max\left|\Delta\xi_\kappa\right| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\xi_\kappa^*\right)\Delta\xi_k .$$

Если для функции $f(z)$, определенной на кривой Γ, данный предел существует, то говорят, что функция $f(z)$ ***интегрируема по кривой*** Γ. Кривая Γ называется ***путем*** или ***контуром*** интегрирования.

Интеграл от функции $f(z)$ в положительном направлении кривой Γ обозначается $\int_{\Gamma^+} f(z)dz$. Интеграл от функции $f(z)$ в отрицательном направлении кривой Γ – символом $\int_{\Gamma^-} f(z)dz$. В случае замкнутого контура Γ интеграл от функции $f(z)$ по кривой Γ обозначается символом $\oint_\Gamma f(z)dz$.

Положительным направлением обхода замкнутого простого контура Γ считается такое направление движения, при котором область, ограниченная данным замкнутым контуром и находящаяся внутри контура Γ, остается слева от направления движения. Противоположное направление обхода замкнутого контура

Γ называется отрицательным. Интеграл по замкнутому контуру Γ в положительном направлении обозначается $\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz$, интегрирование в отрицательном направлении – символом $\oint\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$.

2. Связь интеграла комплексной переменной с криволинейным интегралом второго рода.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ комплексного переменного z непрерывна на гладкой кривой Γ, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, а начальная и конечная точка дуги соответствуют значениям $t = \alpha$ и $t = \beta$, то интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ существует и справедлива формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.

Без доказательства.

Теорема 2. *Если функция $f(z)$ комплексного переменного z непрерывна на гладкой кривой Γ, то интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ существует и справедлива формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{\Gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

► Пусть $f(z)$ непрерывна на кривой Γ, уравнение которой $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)]dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t)) \cdot x'(t) - v(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] +$$

$$+i[v(x(t),y(t))\cdot x'(t)+u(x(t),y(t))\cdot y'(t)]dt=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}[u(x(t),y(t))\cdot x'(t)-v(x(t),y(t))\cdot y'(t)]dt+dt=$$

$$=\int_{\Gamma}udx-vdy+i\int_{\Gamma}vdx+udy. \blacktriangleleft$$

Следствие. $\int_{\Gamma} f(z)|dz|=\int_{\Gamma}u(x,y)dl+i\int_{\Gamma}v(x,y)dl$, где dl – дифференциал длины дуги кривой Γ.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{z-z_0}$, где обход окружности осуществляется в положительном направлении.

Решение. Параметрические уравнения окружности с центром в точке z_0 есть

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos t, \\ y=y_0+R\sin t. \end{cases}$$

Отсюда получим комплексно-параметрическое уравнение окружности

$$z=z_0+R\cdot e^{it},$$

где $0\le t\le 2\pi$.

Тогда

$$\int\limits_{|z-z_0|=R}\frac{dz}{z-z_0}=\int_0^{2\pi}\frac{iR\cdot e^{it}}{R\cdot e^{it}}dt=i\cdot\int_0^{2\pi}dt=2\pi i.$$

3. Свойства интегралов по комплексному переменному. Интегралы от комплексного переменного обладают следующими **свойствами**.

1 (линейность). Если $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой Γ, то для любых комплексных постоянных c_1 и c_2

$$\int_{\Gamma}[c_1f(z)\pm c_2g(z)]dz=c_1\int_{\Gamma}f(z)dz\pm c_2\int_{\Gamma}g(z)dz.$$

2 (ориентированность). Пусть Γ^+ и Γ^- — один и тот же путь интегрирования, проходимый соответственно в положительном и отрицательном направлении кусочно-гладкой кривой Γ, и функция $f(z)$ непрерывна на этой кривой. Тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)dz.$$

3 (аддитивность). Пусть кривая Γ состоит из кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ и функция $f(z)$ непрерывна на Γ. Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\Gamma_n} f(z)dz,$$

причем направление на кривых Γ_k, $k = 0,1,2;...;n-1$, совпадает с направлением на кривой Γ.

4. Если Γ – произвольная кусочно-гладкая кривая с началом z_0 и концом z_1, то $\int\limits_{\Gamma} dz = z_1 - z_0$.

5. Если Γ – гладкая кривая, замкнутая или незамкнутая, имеющая длину L, то $\int\limits_{\Gamma l} |dz| = L$.

6 (оценка интеграла). Для любой функции $f(z)$, непрерывной на гладкой кривой Γ, справедливо неравенство

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le \int_{\Gamma} |f(z)||dz|.$$

7. Если $|f(z)| \le M$ во всех точках гладкой кривой Γ, то справедливо неравенство

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le M \cdot L,$$

где L – длина кривой Γ.

4. Основная теорема Коши. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области E.

Теорема 3 (Коши). *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области E, то интеграл от этой функции по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области E, равен нулю*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

► Предположим, что $f'(z)$ непрерывна. Пусть Γ — какой-нибудь кусочно-гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в области E и $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Тогда согласно теореме 2 имеем

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma} udx - vdy + i\oint_{\Gamma} vdx + udy .$$

В силу условий Коши – Римана в области E имеем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(-v(x,y))}{\partial x}.$$

Из непрерывности $f'(z)$ в области E вытекает непрерывность частных производных первого порядка по x и по y от функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Так как функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в области E, удовлетворяют в ней равенствам Коши-Римана и область E односвязна, то, с учетом формулы Грина, получим

$$\oint_{\Gamma} udx - vdy = \iint_{E}\left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy = 0,$$

$$\oint_{\Gamma} vdx + udy = \iint_{E}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0 .$$

Отсюда получаем $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$. ◄

Теорема Коши для многосвязной области. Теорема Коши допускает распространение на случай *многосвязной области*.

Рассмотрим для определенности трехсвязную область E, ограниченную внешним контуром Γ и внутренними контурами Γ_1 и Γ_2. Выберем положительное направление обхода контуров: при обходе область E остается слева (см. рис.2). Пусть функция $f(z)$ аналитична в области E и на контурах Γ, Γ_1 и Γ_2, (т. е. в замкнутой области $\overline{E}$). Проведя два разреза (две дуги) γ_1 и γ_2 области E (см.рис.2), получим новую односвязную область E_1, ограниченную замкнутым ориентированным контуром Γ^*, состоящим из контуров Γ, Γ_1, Γ_2 и разрезов γ_1 и γ_2:

$$\Gamma^* = \Gamma + \gamma_1{}^+ + \Gamma_1 + \gamma_2{}^+ + \Gamma_2 + \gamma_2{}^- + \gamma_1{}^- .$$

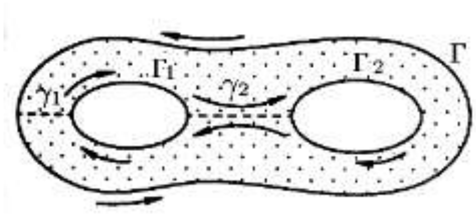


Рис.2.

По теореме Коши для односвязной области

$$\oint_{\Gamma^*} f(z)dz = 0 .$$

Учитывая

$$\oint_{\gamma_1^+ + \gamma_2^+ + \gamma_2^- + \gamma_1^-} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^+} f(z)dz + \oint_{\gamma_1^-} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^-} f(z)dz = 0 ,$$

т. к. каждый из разрезов (дуг) γ_1 и γ_2 при интегрировании проходится дважды в противоположных направлениях. Поэтому получаем:

$$\oint_{\Gamma^*} f(z)dz = \oint_{\Gamma} f(z)dz + \oint_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$$

т. е. интеграл от аналитической в замкнутой многосвязной области функции $f(z)$ по границе области E, проходимой в положительном направлении, равен нулю.

Замечание. Изменив направление обхода внутренних контуров Γ_1, Γ_2 будем иметь

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$$

где все контуры Γ, Γ_1, Γ_2 обходятся в одном направлении: против часовой стрелки (или по часовой стрелке). В частности, если $f(z)$ аналитична в двусвязной области, ограниченной контурами Γ и γ и на самих этих контурах (см. рис.3), то

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} f(z)dz ,$$

т.е. «интеграл от функции $f(z)$ по внешнему контуру Γ равен интегралу от функции $f(z)$ по внутреннему контуру γ (контуры Γ и γ обходятся в одном направлении).

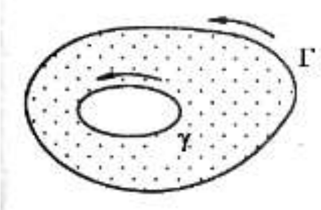


Рис.3.

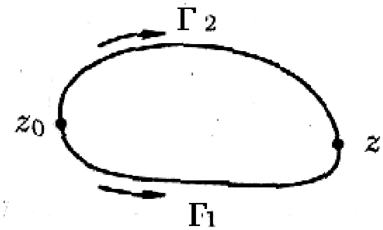


Рис.4.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области E. Тогда интеграл от функции $f(z)$ не зависит от формы пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки z пути интегрирования.*

► Пусть Γ_1 и Γ_2 две кривые в области E, соединяющей точки z_0 и z (рис.4). По теореме Коши

$$\oint\limits_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} f(z)dz = 0 .$$

С другой стороны, по свойствам интеграла

$$\oint\limits_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} f(z)dz = \oint\limits_{\Gamma_1^+} f(z)dz + \oint\limits_{\Gamma_2^-} f(z)dz = \oint\limits_{\Gamma_1^+} f(z)dz - \oint\limits_{\Gamma_2^+} f(z)dz .$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{\Gamma_1^+} f(z)dz - \oint\limits_{\Gamma_2^+} f(z)dz = 0 .$$

Откуда

$$\oint\limits_{\Gamma_1^+} f(z)dz = \oint\limits_{\Gamma_2^+} f(z)dz . \blacktriangleleft$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое направление движения по кривой называется положительным, отрицательным?

2. Что называется интегралом от функции комплексного пе-

ременного по кривой Γ?

3. Как связаны интеграл от функции комплексного переменного по кривой и криволинейный интеграл второго рода?

4. Перечислите свойства интеграла от функции комплексного переменного по кривой.

5. Сформулируйте основную теорему Коши для односвязной области.

6. Сформулируйте основную теорему Коши для многосвязной области.

Лекция 5. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

1. Первообразная и неопределенный интеграл
2. Формула Коши.
3. Принцип максимума модуля аналитической функции.
4. Интеграл типа Коши, теоремы Коши – Лиувилля и Морера.

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Пусть функция $f(z)$ определена в области E (односвязной или многосвязной).

Определение 1. ***Первообразной*** функции $f(z)$ в области E называется такая функция $F(z)$, что в каждой точке $z \in E$ выполняется равенство

$$F'(z) = f(z).$$

Теорема 1. *Если $F(z)$ – первообразная функции $f(z)$ в области E, то совокупность всех первообразных функции $f(z)$ определяется формулой $F(z)+c$, где c – произвольная постоянная.*

► Пусть $F_1(z)$ и $F_2(z)$ две первообразные функции $f(z)$ в области E. Рассмотрим функцию $F(z)=F_1(z)-F_2(z)$. Производная этой функции равна

$$F'(z)=F_1'(z)-F_2'(z)=f(z)-f(z)=0.$$

С другой стороны $F(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Тогда

$$F'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0.$$

Отсюда находим $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$ для любых $(x,y)\in E$.

Следовательно, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ постоянные в области E, т. е. $F(z)=c$, где $c=\text{const}$. ◄

Определение 2. Совокупность всех первообразных, функции $f(z)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(z)$.

Обозначается: $\int f(z)dz = F(z)+c$, где $F'(z)=f(z)$.

Теорема 2 (формула Ньютона-Лейбница). *Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области E, то* *интеграл от* $f(z)$ *вдоль любого кусочно-гладкого контура, соединяющего две любые точки* z_0 *и* z_1 *этой области и лежащего целиком в ней, равен*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0).$$

►Пусть $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ есть произвольная первообразная функции $f(z)$. то имеем $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) + c$, где c — некоторое комплексное число. Полагая здесь $z = z_0$, получим

$$0 = F(z_0) + c,$$

т.е. контур замкнется и интеграл равен нулю.

Отсюда $c = -F(z_0)$.

Тогда $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0)$.

Полагая $z = z_1$, имеем

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0). \blacktriangleleft$$

Интегралы от элементарных функций комплексного переменного в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в случае действительного переменного.

Пример. Вычислить интегралы

1) $\int_0^i z^2 dz$, 2) $\oint_l (z - z_0)^n dz$, $n \neq 1$.

Р е ш е н и е . 1. Имеем

$$\int_0^i z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^i = -\frac{i}{3}.$$

2. Параметрические уравнения окружности с центром в точке z_0 есть

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t. \end{cases}$$

Отсюда комплексно-параметрическое уравнение окружности примет вид:

$$z = x + i\,y = x_0 + R\cos t + i\left(y_0 + R\sin t\right) = x_0 + i\,y_0 + R\left(\cos t + i\sin t\right)$$
$$= z_0 + R \cdot e^{it},$$

где $0 \le t \le 2\pi$.

Тогда

$$\oint\limits_{l} \left(z - z_0\right)^n dz = \int\limits_{|z - z_0| = R} \left(z - z_0\right)^n dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(R \cdot e^{it}\right)^n R \cdot i \cdot e^{it} dt =$$

$$= i \cdot R^{n+1} \cdot \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i \cdot R^{n+1} \cdot \left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1} \cdot \left(\cos 2\pi(n+1) + i\sin 2\pi(n+1) - e^0\right) = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0 .$$

2. Формула Коши.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(z)$ *— аналитическая в односвязной области* E *. Тогда для любой точки* $z_0 \in E$ *и для любого замкнутого кусочно-гладкого контура* Γ*, целиком лежащего в области* E *и содержащего точку* z_0 *внутри себя, справедливо равенство*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz ,$$

где интегрирование производится в положительном направлении замкнутого контура Γ *.*

► Рассмотрим функцию $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ как функцию z в двухсвязной области E', получающейся из E удалением точки z_0 . Очевидно, что $\varphi(z)$ определена всюду в E' и является аналитической в ней. Опишем из точки z_0 , как из центра, окружность c_ρ столь малого радиуса ρ , чтобы она была целиком расположена в области E и не пересекает Γ (рис.1).

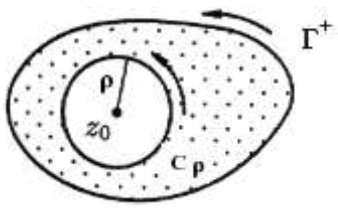


Рис.1.

Тогда, согласно формуле Коши для многосвязной области, имеем

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz .$$

Умножая обе части данного равенства на $\dfrac{1}{2\pi i}$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz .$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+} \frac{f(z_0)+f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} f(z_0)\oint_{c_\rho^+} \frac{1}{z-z_0}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz .$$

Так как $\displaystyle\oint_{c_\rho^+} \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i} f(z_0)\cdot 2\pi i + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz .$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz .$$

Из последнего равенства имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{c_\rho^+} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz| .$$

Так как функция $f(z)$ является аналитической в области E и, следовательно, непрерывной в точке $z_0 \in E$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ($z \in c_\rho$) справедливо, как только $\rho < \delta$.

Значит,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon .$$

Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, а левая часть предыдущего неравенства не зависит ε, и, следовательно, равна нулю, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

Так как функция $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ является аналитической в области E', то, согласно теореме Коши для многосвязной области, окружность c_ρ, лежащая в области E, не изменяя значения интеграла, находящегося в правой части предыдущего равенства, может быть заменена на любой замкнутый кусочно-гладкий контур Γ, лежащий в области E'. Тогда последнее равенство принимает вид

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz . \blacktriangleleft$$

Интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz$ называется ***интегралом Коши*** функции $f(z)$.

Замечание. Если в условиях теоремы точка $z_0 \in E$ расположена вне области, ограниченной контуром Γ, то $\dfrac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \dfrac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$.

Это утверждение непосредственно следует из теоремы Коши, ибо в области G ограниченной контуром Γ, функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ является аналитической.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(z)$ *— аналитическая в односвязной области* E*, ограниченной кусочно-гладким контуром* Γ*, и непрерывна в* $\overline{E}$*. Тогда для любой точки* $z_0 \in E$ *справедливо равенство*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

Пример. Пользуясь формулой Коши, вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz$, где окружность проходится в положительном направлении.

Решение. Внутри области, ограниченной окружностью $|z| = 1$, находится точка $z = 0$, в которой знаменатель функции $f(z) = \dfrac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z}$ обращается в нуль.

Перепишем заданный интеграл так

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} d\zeta = \oint_{|z|=1} \frac{\dfrac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}}{z} .$$

Функция $f(z) = \dfrac{e^z \cdot \cos \pi z}{z+2}$ является аналитической в круге $|z| \le 1$. Применяя формулу Коши, при $z_0 = 0$ получим

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z \cdot \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i .$$

Теорема 5 (о среднем для аналитических функций). *Значение аналитической функции* $f(z)$ *в любой точке* z_0 *области* E*, в которой функция* $f(z)$ *является аналитической, равно среднему арифметическому ее значений на любой окружности с центром в точке* z_0*, целиком лежащей в области* E.

► Пусть c_ρ — окружность радиуса ρ с центром в точке z_0, целиком лежащая в области E. Комплексно-параметрическое уравнение окружности c_ρ имеет вид $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ ($0 \le \varphi \le 2\pi$).

Следовательно,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right) i\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{i\varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{c_\rho^+} f(z)|dz| = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{c_\rho^+} f(z)\, dl,$$

где dl – дифференциал дуги окружности. Последний интеграл можно рассматривать как среднее арифметическое значений $f(z)$ на окружности $|z - z_0| = \rho$. ◄

3. Принцип максимума модуля аналитической функции. Пусть функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – аналитическая в области E.

Лемма 1. *Если в области* E*, в которой определена аналитическая функция*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

и постоянна действительная часть $u(x,y)$ *функции* $f(z)$ *или постоянен модуль функции* $f(z)$*, то функция* $f(z)$ *постоянна в области* E.

►*Случай 1.* $u(x,y) = \text{const}$ в области E.

Тогда $\forall\,(x,y) \in E$ имеем $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} \equiv 0$. Так как функция $f(z)$ – аналитическая в области E, то выполняются условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Отсюда $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \equiv 0$.

Следовательно, $v(x,y) = \text{const}$ $\forall (x,y) \in E$. Таким образом, $f(z) = \text{const}$ $\forall z \in E$.

Случай 2. $|f(z)| = M$, где M – постоянная.

Если $M=0$, то $\forall (x,y)\in E$

$$|f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}\equiv 0.$$

Отсюда следует, что $u(x,y)=v(x,y)\equiv 0$, т.е. $f(z)\equiv 0\quad \forall z\in E$

Пусть $M\neq 0$. Тогда, очевидно, что $f(z)\neq 0$ при $z\in E$. Следовательно, в этом случае $\ln f(z)$ является аналитической функцией в области E (как сложная функция, составленная из аналитических функций). Так как

$$\operatorname{Ln} f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z)$$

и ее действительная часть $\ln|f(z)|$ является постоянной в области E, то по доказанному в случае 1 и сама функция $\operatorname{Ln} f(z)$ является постоянной в этой области. Следовательно, и функция $f(z)$ постоянна в области E. ◄

Теорема 6 (о максимуме модуля аналитической функции). *Пусть функция* $f(z)$, *не равная тождественно постоянной, является аналитической в области* E *и непрерывна в замкнутой области* $\overline{E}$. *Тогда максимальное значение* $|f(z)|$ *достигается только на границе области* $\overline{E}$ *(т.е.* $|f(z)|$ *не может достигать максимума внутри области* E *кроме случая, когда* $f(z)=\text{const}$*).*

Без доказательства.

Замечание. Если функция $f(z)$ не постоянна, аналитична в E и непрерывна в $\overline{E}$ и, кроме того, не обращается в нуль, то минимум $|f(z)|$ не может достигаться внутри $\overline{E}$.

4. Интеграл типа Коши, теоремы Коши–Лиувилля и Морера.

Пусть в плоскости комплексного переменного $\mathbf{C}\,(Oxy)$ задана произвольная кусочно-гладкая кривая Γ (замкнутая или незамкнутая) и на ней — произвольная непрерывная функция $f(z)$.

Определение 2. Интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$, где z – произвольная точка комплексной плоскости, не лежащая на кривой Γ, называется ***интегралом типа Коши***.

Интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши. В самом деле, выражение $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$ становится интегралом Коши, если контур Γ является замкнутым (простым или составным), и функция $f(z)$— аналитической в области E, содержащей в себе целиком контур Γ.

Теорема 7. *Пусть* Γ *— кусочно-гладкая кривая, расположенная в комплексной плоскости* $\mathbf{C}\,(Oxy)$ *и* $f(z)$ *– непрерывная функция на этой кривой. Тогда функция* $\Phi(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$, *является 1) аналитической во всякой области* E *комплексной плоскости* $\mathbf{C}\,(Oxy)$, *не содержащей точек кривой* Γ,

2) бесконечно дифференцируемой в области E, *причем ее производная любого порядка* n *может быть получена путем* n*-кратного дифференцирования по* z *подынтегральной функции*

$$\Phi^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z_0)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Без доказательства.

Следствия. 1. *Пусть* $f(z)$ *аналитическая в области* E *функция. Тогда функция* $f(z)$ *бесконечно дифференцируема в этой области и ее производная* n*-го порядка находится по формуле*

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n=1,2,\dots.$$

2. *Производные любого порядка от функции* $f(z)$, *аналитической в области* E, *также являются аналитическими в этой области.*

Этот факт непосредственно следует из того, что по следствию 1 каждая функция $f^{(n)}(z)$, $n=1,2,\dots$, сама является дифференцируемой в области E.

3. *В любой точке* z *области* E, *в которой функция* $f(z)$ *является аналитической, справедливы неравенства Коши*

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!\cdot M(\rho)}{\rho^n},\ n=1,2,\dots,$$

где ρ *— радиус произвольной окружности* c_ρ *с центром в точке* z_0*, целиком лежащей в области* E *;* $M(\rho)$*– наибольшее значение модуля функции* $f(z)$ *на окружности* c_ρ *.*

Пример. Пользуясь формулой для производных аналитической функции, вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$, где окружность проходится в положительном направлении.

Решение. Подынтегральная функция $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ является аналитической в области $|z| \le 1$ всюду, кроме точки $z = 0$. Функция $f(z) = \cos z$ является всюду аналитической в круге $|z| \le 1$. При $n = 2$ по следствию 1 имеем $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0)$.

Так как $f''(z) = -\cos z$ и $f''(0) = -1$, то

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = \pi \cdot i \cdot (-1) = -\pi \cdot i .$$

Теорема 8 (Коши—Лиувилля). *Если функция* $f(z)$ *аналитична во всей комплексной плоскости* $\mathbf{C}$ (Oxy) *и ограничена по модулю, то она постоянна.*

► Пусть всюду $|f(z)| \le M$, где M — некоторое положительное число. Для произвольной точки z комплексной плоскости и для любого $\rho > 0$ неравенство Коши при $n = 1$ имеет вид $|f'(z)| \le \frac{M}{\rho}$. Правая часть полученного соотношения при увеличении ρ может стать сколь угодно малой, а левая часть не зависит от ρ, поэтому $|f'(z)| = 0$.Так как z – произвольно, то на всей комплексной плоскости $f'(z) \equiv 0$

Отсюда следует, что $f(z) = c$, где $c = \text{const}$.◄

Теорема 9 (Морера). *Если функция* $f(z)$ *непрерывна в области* E *и интеграл* $\int\limits_\Gamma f(z) dz = 0$ *по любому замкнутому кусочно-*

гладкому контуру Γ*, лежащему в области* E*, то* $f(z)$ *является аналитической функцией в области* E.

Без доказательства.

Из условия теоремы следует, что в области E интеграл $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ не зависит от пути Γ интегрирования, соединяющего фиксированную точку z_0 с произвольной точкой z (z_0 и z лежат в области E) и определяет аналитическую функцию z

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

для которой $F'(z) = f(z)$, $z \in E$.

Тогда, согласно следствию 1 теоремы 7 имеем, что функция $f(z)$ как производная от аналитической функции $F(z)$, является функцией, аналитической в области E.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется первообразной для функции комплексного переменного?
2. Дайте определение неопределенного интеграла для функции комплексного переменного. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Докажите интеграл Коши.
4. В чем суть теоремы о среднем для функции комплексного переменного?
5. В чем состоит принцип максимума модуля аналитической функции?
6. Какой интеграл называется интегралом типа Коши?
7. Запишите неравенство Коши для функции комплексного переменного.
8. Сформулируйте и докажите теорему Коши-Лиувилля.
9. В чем суть теоремы Морера?

Лекция 6. РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Ряды комплексных чисел.
2. Функциональные ряды.
3. Равномерная сходимость функционального ряда.
4. Степенные ряды.

1. Ряды комплексных чисел.

Определение 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, членами которого являются комплексные числа, называется ***числовым рядом с комплексными членами***, где a_k – ***члены*** ряда.

Если положить $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k \in \mathrm{N}$, – комплексные постоянные, то ряд с комплексными членами запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k \ .$$

Определение 2. Сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i\beta_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i\sum_{k=1}^{n} \beta_k$$

называется ***частичной суммой*** ряда,
сумма

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k + i\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k$$

называется ***остатком*** ряда.

Определение 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ называется ***сходящимся***, если существует предел последовательности частичных сумм $\left(S_n\right)_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S ,$$

комплексное число S называется ***суммой*** ряда.

В случае сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ его остаток r_n стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что при $n > N$ выполняется неравенство $|r_n| < \varepsilon$.

Очевидно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$. При этом $S = S_1 + iS_2$, где S_1 – сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, S_2 – сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$.

Это позволяет проводить исследование сходимости рядов с комплексными членами, основываясь на сходимости рядов с действительными членами. Для исследования применяются известные методы из математического анализа функций действительной переменной (принципы сравнения рядов, признак д'Аламбера и Коши и другие достаточные признаки сходимости рядов).

Теорема 1 (необходимое условие сходимости). *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ *сходится, то его общий член* $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ *стремится к нулю при* $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (\alpha_k + i\beta_k) = 0.$$

Без доказательства.

Теорема 2 (достаточное условие сходимости). *Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i\beta_k$ *сходится, если сумма* $\sum_{k=n}^{n+m} \alpha_k + i\beta_k$ *стремится к нулю при* $n \to \infty$, *т. е. для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такой номер* N, *что* $\left|\sum_{k=n}^{n+m} \alpha_k + i\beta_k\right| < \varepsilon$, *если* $n > N$, $m > N$.

Без доказательства.

Добавление или отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Определение 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд с действительными положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$, $a_k = \alpha_k + i\beta_k$.

В случае абсолютной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k + i\beta_k$ имеем абсолютную сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$.

2. Функциональные ряды.

Определение 5. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$, членами которого являются функции $u_k(z)$ комплексной переменной z, называется ***функциональным*** рядом.

Определение 6. Точка z_0 называется ***точкой сходимости*** ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$, если сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$.

Определение 7 Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ называется ***сходящимся*** в области E, если он сходится в каждой точке этой области.

Совокупность всех точек сходимости называется ***областью сходимости*** функционального ряда. В общем случае область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ может быть многосвязной и замкнутой.

Определение 8. ***Суммой*** функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ в области E называется однозначная функция $f(z)$, значение которой в каждой фиксированной точке $z_0 \in E$ равно сумме соответствующего числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$:

$$f(z_0)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0) \text{ при } z_0\in E .$$

Другими словами функция $f(z)$ является суммой функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ в точке z_0 области E, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что $\left|f(z_0)-\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)\right|<\varepsilon$ при $n>N$. В общем случае номер N зависит от выбора величин ε и z.

3. Равномерная сходимость функционального ряда.

Определение 9. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ называется ***равномерно сходящимся*** к функции $f(z)$ в области E, если значение N зависит только от ε и одинаково для $z\in E$ одновременно:

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)\rightrightarrows f(z).$$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ равномерно сходится в области E, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер N, что для любых $z_1\in E$ и $z_2\in E$ имеет место неравенство

$$\left|f(z_1)-f(z_2)\right|<\varepsilon$$

Теорема 3 (признак Вейерштрасса). *Если в некоторой области E члены ряда, составленного из функций комплексной переменной, не превосходят по модулю соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами, то указанный функциональный ряд в области E сходится равномерно.*

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают следующими **свойствами**.

1 (непрерывность). *Сумма равномерно сходящегося в области E ряда, состоящего из непрерывных функций, есть функция, непрерывная в области E.*

2 (интегрирование). *Равномерно сходящийся в области E ряд непрерывных функций можно почленно интегрировать* *вдоль всякой кусочно-гладкой кривой* Γ, *целиком лежащей в области. При этом сумма ряда, составленного из интегралов от членов исходного ряда, равна интегралу от суммы исходного ряда вдоль той же кривой:*

$$\int_{\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)\right)dz=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Gamma}u_k(z)dz=\int_{\Gamma}f(z)dz\ .$$

3 (дифференцирование). *Пусть* $u_k(z)$ *аналитические в области* E *функции и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ *сходится равномерно в* E *к* $f(z)$, *т.е.* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)\rightrightarrows f(z)$. *Тогда 1)* $f(z)$ *аналитическая в области* E, *2) функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ *в области* E *можно дифференцировать любое число раз и справедлива формула*

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(n)}(z)=f^{(n)}(z).$$

► *Шаг 1.* Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ состоит из непрерывных функций и сходится равномерно к $f(z)$, то $f(z)$ непрерывна в E. Для любого замкнутого контура Γ, целиком лежащего в E, имеем

$$\oint_{\Gamma}f(z)dz=\sum_{k=1}^{\infty}\oint_{\Gamma}u_k(z)dz=0\,.$$

По теореме Морера $f(z)$ является аналитичной в E.

Шаг 2. Умножим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ на $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$, где z_0 – фиксированная точка области E. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{u_k(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\rightrightarrows\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,.$$

И пусть $|z-z_0|\ge\alpha$ для любого $z\in\overline{E}$, где $\overline{E}=E\cup\partial E$, ∂E – граница области E.

Отсюда $\left|\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \left|\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right|$.

Проинтегрируем $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{u_k(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ по границе области ∂E

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n!}{2\pi i}\cdot\oint_{\partial E}\frac{u_k(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{n!}{2\pi i}\cdot\oint_{\partial E}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,.$$

Отсюда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(z_0)$.◄

4. Степенные ряды.

Определение 10. ***Степенным рядом*** называется ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k\,,$$

где c_k – постоянные комплексные числа (коэффициенты ряда).

Для степенных рядов справедлива следующая теорема.

Теорема 4 (Абеля). *Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ *сходится в точке* z_1, *то он сходится во всех точках* z, *удовлетворяющих условию* $|z-z_0|<|z_1-z_0|$. *Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ *расходится в точке* z_2, *то он расходится во всех точках* z, *удовлетворяющих условию* $|z-z_0|>|z_2-z_0|$.

Без доказательства.

Следствие 1. *Для степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$, *имеющего как точки сходимости (кроме* z_0, *где ряд всегда сходится), так и точки расходимости, всегда существует такое действительное число* $R>0$, *что внутри круга* $|z-z_0|<R$ *ряд сходится, а вне этого круга – расходится.*

В круге радиуса ρ, $\rho < R$, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ сходится равномерно.

О п р е д е л е н и е 11. Область $|z - z_0| < R$ называется ***кругом сходимости***, а число R – ***радиусом*** сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости R вычисляется по формуле Коши

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|c_k|}},$$

где $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$ — верхний предел последовательности коэффициентов $\left(\sqrt[k]{|c_k|}\right)_{k=1}^{\infty}$.

Если $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \infty$, то $R = 0$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ сходится лишь в точке z_0.

Если $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$, то $R = \infty$ и ряд сходится на всей комплексной плоскости.

Радиус сходимости R может также вычисляется по формуле $R = \lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$, если этот предел существует.

Следствие 2. *Внутри круга сходимости* $|z - z_0| < R$ *ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ *сходится к аналитической функции.*

Следствие 3. *Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно интегрировать и почленно дифференцировать любое число раз. При этом радиус сходимости каждого вновь полученного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда, а над суммой ряда выполняется то же действие, что и над самим рядом.*

Примеры. 1. Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k$.

2. Найти область сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(k+1)2^k}$.

Решение. 1. Каждый коэффициент ряда равен 1, поэтому радиус сходимости $R=1$. Заданный ряд является рядом геометрической прогрессии, для которого

$$S_n(z)=1+(z-z_0)+\ldots+(z-z_0)^n=\frac{1-(z-z_0)^{n+1}}{1-(z-z_0)}.$$

Поэтому сумма ряда есть аналитическая функция

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\frac{1}{1-(z-z_0)}.$$

2.Радиус сходимости есть $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}(k+2)}{(k+1)2^k}\right|=2$.

Поэтому ряд сходится в области $|z-i|<2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется числовым рядом комплексных чисел?

2. Какой ряд с комплексными числами называется сходящимся?

3. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда с комплексными числами.

4. Какой ряд с комплексными числами называется абсолютно сходящимся?

5. Какой ряд называется функциональным рядом комплексных функций? Что называется точкой сходимости и областью сходимости такого ряда?

6. Какой функциональный ряд называется равномерно сходящимся? Перечислите основные свойства равномерно сходящихся рядов.

7. Какой функциональный ряд называется степенным? Какими свойствами он обладает?

Лекция 7. РЯД ТЕЙЛОРА

1. Ряд Тейлора.
2. Голоморфные функции.
3. Нули аналитической функции. Теорема единственности.

1. Ряд Тейлора.

Теорема 1 (Тейлора). *Функция* $f(z)$*, аналитическая в круге* $|z - z_0| < R$*, единственным образом разлагается в ряд Тейлора*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k ,$$

где $c_0 = f(z_0)$, $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

► *Шаг 1. Разложение*. Пусть z — произвольная точка круга $|z - z_0| < R$. Опишем из точки z_0, как из центра, окружность c_ρ радиуса $\rho < R$ так, чтобы точка z находилась внутри этой окружности (рис. 1).

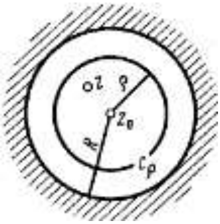


Рис.1.

Согласно условию, функция $f(z)$ является аналитической внутри области, ограниченной окружностью c_ρ, и на самой окружности c_ρ. Поэтому ее значение в точке z можно найти по интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_\rho^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta ,$$

где ζ – точка окружности c_ρ.

Преобразуем выражение $\dfrac{1}{\zeta - z}$ следующим образом

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\cdot\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{\frac{1}{\zeta - z_0}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Для любого $\zeta \in c_\rho$ имеем $|\zeta - z_0| = \rho$ и $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = \rho$.

Значит, $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = q_z < 1$.

Следовательно, выражение $\frac{1}{\zeta - z}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{\zeta - z_0}$ и знаменателем $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$.

Таким образом, $\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$.

Так как для всех $\zeta \in c_\rho$ имеем $\left|\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\right| < \frac{(z - z_0)^k}{\rho^{k+1}}$ при $k = 0,1,2,\ldots$ и числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{\rho^{k+1}}$ в $|z - z_0| < \rho$ сходится, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ сходится равномерно относительно ζ на c_ρ. Равномерная сходимость этого ряда не нарушится при умножении всех членов на функцию $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$, непрерывную относительно ζ на c_ρ, и, следовательно, ограниченную на c_ρ по модулю:

$$\frac{f(\zeta)}{2\pi i}\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(z)}{2\pi i}\cdot\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

При этом членами полученного ряда являются функции $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}\cdot\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ непрерывные по ζ. Поэтому возможно почленное интегрирование этого ряда вдоль окружности c_ρ:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c_\rho^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left[\oint\limits_{c_\rho^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\right](z-z_0)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot(z-z_0)^k,$$

где $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{c_\rho^+}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$.

Функция $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$, $k=0,1,2,\ldots$, является аналитической в двухсвязной области $0<|z-z_0|<R$. Поэтому окружность c_ρ можно заменить любым замкнутым кусочно-гладким контуром Γ, целиком лежащим в области $0<|z-z_0|<R$ и окружающим точку z_0. Используя интегральную формулу типа Коши, коэффициенты c_k находятся по формуле

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Так как z произвольная точка круга $|z-z_0|<R$, то что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ сходится к $f(z)$ в круге $|z-z_0|<R$ всюду, причем в круге $|z-z_0|\le r<R$ этот ряд сходится равномерно.

Шаг 2. Единственность. Предположим, что в круге $|z-z_0|<R$ имеет место разложение $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k\cdot(z-z_0)^k$, где хотя бы один из коэффициентов b_k отличен от c_k.

Последовательно дифференцируя почленно этот ряд бесконечное число раз, получим

$$f'(z)=b_1+2b_2(z-z_0)+3b_3(z-z_0)^2+\ldots+nb_n(z-z_0)^{n-1}+\ldots,$$

$$f''(z)=2b_2+3\cdot 2b_3(z-z_0)+\ldots+n(n-1)b_n(z-z_0)^{n-2}+\ldots,$$

.... ,

$$f^{(n)}(z)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot b_n+(n+1)n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot b_n(z-z_0)+\ldots.$$

Полагая в этих равенствах и в исходном ряде $z=z_0$, имеем:

$$b_0 = f(z_0),\ b_1 = f'(z_0),\ b_2 = \frac{f''(z_0)}{2!},\ \dots,\ b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ \dots .$$

Сравнивая найденные коэффициенты b_k ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot (z - z_0)^k$$

с коэффициентами ряда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k$, заключаем, что

$$b_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = c_k$$

для $k = 0,1,2,\dots$.Отсюда следует единственность разложения. ◄

Замечание. При $z_0 = 0$ получаем ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot z^k .$$

Разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций комплексного переменного аналогичны разложениям в ряд Тейлора функций действительного переменного:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \frac{z^n}{n!} + \dots,\ z \in \mathbf{C},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,\ z \in \mathbf{C},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots,\ z \in \mathbf{C},$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots,\ |z| < 1,$$

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \dots,\ |z| < 1.$$

Теорема 2 (формула Эйлера) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

► В разложении функции e^z заменим z на iz:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} \dots \frac{(iz)^n}{n!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = \cos z + i \sin z . ◄$$

2. Голоморфные функции.

Определение 1. Говорят, что функция $f(z)$ ***голоморфна*** в точке z_0, если она в некоторой окрестности этой точки раскладывается в степенной ряд относительно $z - z_0$.

Свойство голоморфности функции $f(z)$ в точке z_0 эквивалентно аналитичности $f(z)$ в этой точке. Так $f(z)$ голоморфна в точке z_0, то существует круг с центром в точке z_0, внутри которого $f(z)$ раскладывается в степенной ряд. При этом $f(z)$ как сумма степенного ряда — аналитическая функция внутри этого круга, следовательно, аналитическая в точке z_0.

Если же $f(z)$ – аналитическая в точке z_0, то существует круг с центром в этой точке, внутри которого $f(z)$ является аналитической функцией. Тогда $f(z)$ может быть представлена в виде суммы степенного ряда, сходящегося внутри этого круга. Следовательно, $f(z)$ является голоморфной в точке а.

Определение 2. Функция, голоморфная в каждой точке области E, называется ***голоморфной в этой области***.

Итак, если $f(z)$ голоморфна в области E, то $f(z)$ – аналитична в этой области.

3. Нули аналитической функции. Всякая функция $f(z)$, аналитичная в окрестности точки z_0, разлагается в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k ,$$

где $c_0 = f(z_0)$, $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c_\rho} \dfrac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}}$, $(k = 1, 2, \ldots)$,

c_ρ – произвольная окружность с центром в точке z_0.

Определение 3. Точка z_0 называется ***нулем*** функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

В этом случае разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 в ряд Тейлора не содержит нулевого члена, т.к.
$c_0 = f(z_0) = 0$.

Если $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$ и $c_m \neq 0$, то разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots .$$

В этом случае точка z_0 называется ***нулем кратности*** m или ***нулем порядка*** m. При $m = 1$ точка z_0 называется ***простым нулем***.

Теорема 3 (единственности). *Пусть функция* $f(z)$ *– аналитическая в точке* z_0 *и не равна тождественно нулю в некоторой окрестности точки* z_0. *Тогда, если точка* z_0 *является нулем функции* $f(z)$, *то существует окрестность точки* z_0, *в которой функция* $f(z)$ *не имеет других нулей, кроме* z_0.

► Так как $f(z_0) = 0$, то разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора в достаточно малой окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots .$$

Из формул $c_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ для коэффициентов ряда Тейлора следует, что если z_0 является нулем кратности m, то $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ и $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Поэтому разложение функции $f(z)$ в ряд Тейлора можно записать

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \left[c_m + c_{m+1}(z - z_0) + c_{m+2}(z - z_0)^2 + \dots\right],$$

где $c_k \neq 0$.

Отсюда следует, что в некоторой окрестности нуля z_0 порядка m, аналитическая функция $f(z)$ примет вид

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = c_m + c_{m+1}(z - z_0) + c_{m+2}(z - z_0)^{m+2} + \dots$, $c_m \neq 0$.

Так как функция $\varphi(z)$ является аналитической, то она непрерывна в некоторой окрестности точки z_0 и $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = c_m = \varphi(z_0)$.

Поскольку $\varphi(z_0) = c_m \neq 0$, то, в силу непрерывности $\varphi(z)$ в точке z_0 около точки z_0 существует достаточно малая окрестность, в которой $\varphi(z) \neq 0$. Таким образом, в достаточно малой окрестности точки z_0 аналитическая функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=(z-z_0)^m \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)\neq 0$ в окрестности точки z_0. ◄

Замечание. Верно и обратное утверждение: если функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=(z-z_0)^m \cdot \varphi(z)$, где

$$\varphi(z)=c_m + c_{m+1}(z-z_0)+c_{m+2}(z-z_0)^{m+2}+\cdots$$

и m – натуральное число, $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, причем $\varphi(z)\neq 0$, то точка z_0 есть нуль кратности m функции $f(z)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему Тейлора.
2. Докажите формулу Эйлера.
3. Какие точки называются нулями функции?
4. В чем состоит теорема единственности?

Лекция 8. РЯД ЛОРАНА И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

1. Ряд Лорана.
2.Классификация изолированных особых точек аналитической функции.
3. Разложение аналитической функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

1. Ряд Лорана.

Определение 1. Ряд вида $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$, где k – принимает все целые значения, z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости; z – переменная точка; c_k — некоторые комплексные числа (коэффициенты ряда), называется ***рядом Лорана***.

Этот ряд понимается как сумма двух рядов

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z-z_0)^{-k} .$$

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ называется ***правильной частью*** ряда Лорана, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z-z_0)^{-k}$ называется ***главной частью*** ряда Лорана.

Определение 3. ***Областью сходимости*** ряда Лорана называется общая часть сходимости его главной части, и области сходимости его правильной части.

Областью сходимости правильной части ряда Лорана является круг радиуса $R_1 = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}}$ с центром в точке z_0. Внутри этого круга ряд сходится к некоторой аналитической функции $f_1(z)$ – сумме ряда.

Определим область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k}$. Введем новую переменную $\xi = \dfrac{1}{z-z_0}$. Тогда получим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\cdot\xi^k$, который является степенным и сходящимся в круге радиуса $\rho = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|c_{-k}|}}$ к аналитической функции $\varphi(\xi)$, $|\xi|<\rho$. Возвращаясь к переменной z, имеем

$$\varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k},$$

для всех z удовлетворяющих неравенству $\left|\dfrac{1}{z-z_0}\right| < \rho$ или

$$|z-z_0| > \frac{1}{\rho}.$$

Введем обозначения $f_2(z) = \varphi\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)$, $R_2 = \dfrac{1}{\rho}$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k}$ сходится к функции $f_2(z)$ вне круга радиуса R_2 с центром в точке z_0.

Итак, $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ в круге $|z-z_0| < R_1$,

$f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k}$ в круге $|z-z_0| > R_2$.

Если $R_1 > R_2$, то существует общая область сходимости рядов, составляющих ряд Лорана. Внутри этого кольца ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ сходится к некоторой аналитической функции

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z).$$

Если $R_1 < R_2$, то ряд Лорана нигде не сходится.

Пусть $f(z)$ аналитическая функция в кольце $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

Теорема 1. *Функция* $f(z)$, *аналитическая в кольце* $R_1 < |z - z_0| < R_2$, *однозначно представляется в этом кольце рядом Лорана* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, *где коэффициенты* c_k *вычисляются по формуле*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{k'}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$C_{k'}$ *– любой замкнутый контур в кольце* $R_1 < |z - z_0| < R_2$, *содержащий точку* z_0 *внутри.*

Без доказательства.

Следствие. *Пусть функция* $f(z)$ *– аналитическая в кольце* $R_1 < |z - z_0| < R_2$. *Если на окружности* $|z - z_0| = R$, $R_1 < R < R_2$, *модуль функции* $f(z)$ *не превышает* M, *т.е.* $|f(z)| < M$, *то* $|c_k| \le \frac{M}{R^k}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Пример. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

в круге $|z| < 1$.

Решение. Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

В круге $|z| < 1$ полученные дроби разлагаются в сходящиеся геометрические прогрессии:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{2^n} + \cdots \right),$$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} = -(1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots).$$

Тогда ряд Лорана для $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ есть

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right)+\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n+1}}z^n+\cdots.$$

2. Классификация изолированных особых точек аналитической функции.

Определение 4. ***Особой точкой*** функции $f(z)$ называется точка, в которой функция не является аналитичной.

Определение 5. Особая точка z_0 аналитической функции $f(z)$ называется ***изолированной***, если в некоторой ее окрестности не содержится других особых точек функции $f(z)$.

Из определения следует, что если точка z_0 является изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$, то найдется такое положительное число $R>0$, что в кольце $0<|z-z_0|<R$ функция является аналитической и разлагается в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(z-z_0)^k}.$$

Классификация особых точек аналитической функции $f(z)$ производится в зависимости от вида ряда Лорана

Определение 6. Особая точка z_0 называется ***устранимой особой*** точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана функции $f(z)$ не содержит членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ (ряд Лорана не содержит главной части $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$).

Определение 7. Особая точка z_0 называется ***полюсом*** функции $f(z)$, если ряд Лорана функции $f(z)$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, т.е. в главной части ряда содержится конечное число членов:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}.$$

Если $m=1$, то полюс z_0 называется ***простым***, если $m \geq 2$,то кратным; число m называется ***порядком*** полюса,

Определение 8. Точка z_0 называется ***существенно особой*** точкой функции $f(z)$, если ряд Лорана содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$ (в главной части ряда содержится бесконечно много членов с отрицательными показателями).

Теорема 2. *Если точка z_0 является устранимой особой точкой аналитической функции $f(z)$, то в некоторой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ ограничена, и ее можно представить в виде*

$$f(z)=(z-z_0)^m \cdot \varphi(z),$$

где m – некоторое натуральное число; $\varphi(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки z_0, $\varphi(z) \neq 0$.

►*Шаг 1. Ограниченность.* Пусть z_0 – устранимая особая точка аналитической функции $f(z)$. В этом случае разложение $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ во всех точках кольца $0<|z-z_0|<R$.

Так как правая часть равенства $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ является степенным рядом, сходящимся в круге $|z-z_0|<R$, то его сумма аналитична в круге и непрерывна в точке z_0. Поэтому при $z \to z_0$ сумма этого ряда имеет предел, равный c_0, т.е. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)=c_0$. Если функция $f(z)$ не была определена в точке z_0, то доопределим ее, положив $f(z_0)=c_0$. Если первоначальное значение функции $f(z_0)$ не совпадает с c_0, то изменим значение функции $f(z)$ в точке z_0, положив $f(z_0)=c_0$. Определенная таким образом функция $f(z)$ является аналитической всюду в круге $|z-z_0|<R$. Тем самым разрыв функции $f(z)$ в точке z_0 устранен.

Так как $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$, $c_0 \neq \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - c_0| < \varepsilon$. Отсюда следует, что аналитическая функция $f(z)$ является ограниченной в δ-окрестности устранимой особой точкой z_0.

Шаг 2. Представление в виде $f(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi(z)$. Пусть в степенном ряде $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ первый из необращающихся в нуль коэффициентов есть c_m, $m = 0,1,2,\dots$. Тогда ряд перепишется в виде $f(z) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ или

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-m}$$

Если положить $\varphi(z) = \sum\limits_{k=m}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-m}$, то ряд Лорана для функции $f(z)$ принимает следующий вид $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$. ◄

Замечание. Верно и обратное утверждение: если функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $0 < |z - z_0| < R$, ограничена в этом кольце, то точка z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$.

Пример. Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ не определена в точке $z = 0$. При $z \neq 0$ функцию можно представить в виде ряда

$$\frac{\sin z}{z} =$$

$$= \frac{z - \dfrac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots .$$

Ряд Лорана в точке $z = 0$ не содержит членов с отрицательными степенями, т.е. ряд Лорана не содержит главной части.

Поэтому точка $z=0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$.

Из найденного разложения также следует, что $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$.

Если доопределить функцию $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$, положив $f(0)=1$, то функция $f(z)$ будет аналитической и в точке $z=0$.

Теорема 3. *Для того чтобы точка* z_0 *была полюсом порядка* m *функции* $f(z)$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty .$$

► *Необходимость*. Пусть z_0 — полюс функции $f(z)$, аналитической в кольце $0<|z-z_0|<R$. Разложение функции в ряд Лорана в этом кольце есть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m},$$

где $c_{-m}\neq 0$.

Умножая обе части разложения на $(z-z_0)^m$, получим

$$f(z)(z-z_0)^m=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^{k+m}+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}++c_{-2}(z-z_0)^{m-2}+\cdots+c_{-m}.$$

Отсюда следует, что для функции $\varphi(z)=(z-z_0)^m f(z)$ точка z_0 является устранимой особой точкой. Учитывая, что сумма степенного ряда, находящегося в правой части равенства, аналитична и поэтому непрерывна в круге $|z-z_0|<R$, находим

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}, \text{ где } c_{-m}\neq 0.$$

Тогда $\lim\limits_{z\to z_0}\left(|z-z_0|^m\cdot|f(z)|\right)=|c_{-m}|$, где $|c_{-m}|\neq 0$.

Пусть q – некоторое положительное число, удовлетворяющее условию $q<|c_{-m}|$. Тогда в некотором круге с центром z_0 достаточно малого радиуса выполняется неравенство $|z-z_0|^m\cdot|f(z)|>q$.

Отсюда $\left|f(z)\right| > \dfrac{q}{\left|z-z_0\right|^m}$.

Из последнего неравенства следует, что $\lim\limits_{z\to z_0}\left|f(z)\right| = \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Достаточность. Пусть M – любое положительное число. Тогда, согласно условиям теоремы, можно указать такую δ -окрестность точки z_0, в которой выполняется неравенство $\left|f(z)\right| > M$. Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. В δ-окрестности точки z_0 функция $g(z)$ является аналитической и ограниченной. Поэтому точка z_0 является устранимой особой точкой для функции $g(z)$. Следовательно, функция $g(z)$ в окрестности точки z_0 может быть представлена в виде $g(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, где m – некоторое натуральное число и функция $\varphi(z)$ – аналитическая функция, $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда для функции $f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ в δ-окрестности точки z_0 имеем $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\dfrac{1}{\varphi(z)}$ или $f(z) = \dfrac{\varphi_1(z)}{(z-z_0)^m}$. Здесь $\varphi_1(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$ – аналитическая функция, для которой в δ-окрестности точки z_0 справедливо следующее разложение в ряд Тейлора

$$\varphi_1(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots, \ c_0 \neq 0.$$

Тогда в δ-окрестности точки z_0 разложение функции $f(z)$ принимает вид

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-z_0)^m} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}(z-z_0)^k .$$

Отсюда следует, что точка z_0 является полюсом порядка m для аналитической функции $f(z)$.◄

Пример. Функция $f(z)=\dfrac{z-1}{(z^2+9)(z+1)^4}$ имеет три полюса: $z_1=-1$ четвертого порядка, $z_2=3i$ и $z_3=-3i$ полюсы первого порядка.

О п р е д е л е н и е 9. Аналитическая функция $f(z)$ называется ***мероморфной***, если она в конечной части комплексной плоскости $\mathbf{C}\ (Oxy)$ не имеет других особых точек, кроме полюсов.

Теорема 4 (Сохоцкого). *Пусть* z_0 *существенно особая точка. Каково бы ни было комплексное число* W *(конечное или нет), существует такая последовательность* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходящаяся* z_0, *что* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=W$.

Без доказательства.

Даная теорема говорит о том, что в достаточно малой окрестности существенно особой точки z_0 функция $f(z)$ становится неопределенной. В такой точке функция не имеет ни конечного ни бесконечного пределов. Выбирая различные последовательности точек $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящихся к точке z_0, можно получать различные последовательности соответствующих значений функций, сходящихся к различным пределам.

Пример. Функция $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки $z=0$ имеет следующее разложение в ряд Лорана

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot z^n}+\cdots.$$

Видно, что точка $z=0$ является существенно особой точкой.

Если $z\to 0$ вдоль положительной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$. Если $z\to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}=\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}=0$.

3. Разложение аналитической функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Точка $z=\infty$ называется ***изолированной особой точкой*** аналитической функции

$f(z)$, если вне круга некоторого радиуса R функция $f(z)$ не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от начала координат. Положим $z=\dfrac{1}{w}$. При этом преобразовании точка $z=\infty$ перейдет в точку $w=0$ и окрестность бесконечно удаленной точки, в которой функция $f(z)$ аналитична, перейдет в окрестность точки $w=0$. Функция $g(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ является аналитической в окрестности точки $w=0$. Разложение функции $g(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $w=0$ есть $g(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{'} w^k$. Возвращаясь к прежней переменной $z=\dfrac{1}{w}$, получим

$$f(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k ,$$

где $c_k = c_{-k}^{'}$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ ..

Очевидно, что данное разложение содержит столько членов с положительными степенями z, сколько членов с отрицательными степенями w содержит разложение функции $g(w)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ ряд Лорана в окрестности точки $w=0$.

Итак, 1) если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана нет членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка $z=\infty$ называется ***устранимой особой*** точкой функции $f(z)$;

2) если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана есть лишь конечное число членов с положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка $z=\infty$ называется ***полюсом*** функции $f(z)$;

3) если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана есть бесконечно много членов положительными степенями z, то бесконечно удаленная точка $z=\infty$ называется ***существенно особой*** точкой функции $f(z)$.

Справедливы следующие утверждения:

– если бесконечно удаленная точка является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то функция стремится к конечному пределу при $z\to\infty$;

– если функция $f(z)$ имеет в бесконечно удаленной точке полюс, то $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$;

– если бесконечно удаленная точка является существенно особой точкой для функции $f(z)$, то каково бы ни было комплексное число (конечное или бесконечное), существует такая последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, стремящаяся к существенно особой точке $z_n \to \infty$, что $\lim\limits_{z_n\to\infty} f(z_n)=W$.

Если функция $f(z)$ имеет в точке $z=\infty$ устранимую особенность, то говорят, что она аналитична в бесконечно удаленной точке, и принимают $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Пример. Определить какую особенность в бесконечно удаленной точке имеет функция $f(z)=\dfrac{1}{z-4}$.

Решение. Произведем замену переменного z на переменную w по формуле $z=\dfrac{1}{w}$. Тогда данная функция принимает следующий вид $f\left(\dfrac{1}{w}\right)=\dfrac{w}{1-4w}$. При условии $|4w|<1$ имеет место разложение $f\left(\dfrac{1}{w}\right)=w\left(1+4w+(4w)^2+\cdots\right)$. Возвращаясь к переменной z, имеем

$$f(z)=\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{4}{z}+\frac{4^2}{z^2}+\cdots\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{z^{k+1}},\ |z|<4.$$

Точка $z=\infty$ является устранимо особой точкой.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой ряд называется рядом Лорана?

2. Как определяется область сходимости правильной и главной частей ряда Лорана?

3. Сформулируйте теорему о разложении аналитической функции в ряд Лорана.

4. Какая точка называется особой точкой функции?

5. Какой вид имеет ряд Лорана функции в окрестности устранимой особой точки?

6. Какому условию удовлетворяет функция в полюсе?

7. В чем суть теоремы Сохоцкого?

8. Как разлагается функция в ряд Лорана окрестности бесконечно удаленной точки?

9. В чем особенность поведения аналитической функции в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$?

Лекция 9. ВЫЧЕТЫ

1.Определение вычета и основная теорема о вычетах.
2.Вычисление вычетов.
3.Логарифмический вычет.
4.Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки

1. Определение вычета и основная теорема о вычетах. Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в каждой точке области E, за исключением точки z_0. Точка z_0 является изолированной особой точкой функции $f(z)$. И пусть Γ – кусочно-гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в области E и не проходящий через особую точку функции $f(z)$. Разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta, \; n = 0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

О п р е д е л е н и е 1. ***Вычетом*** аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz$, взятому в положительном направлении по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ, лежащему в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащему внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

Обозначается: $\operatorname{Res} f(z_0)$ или $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$.

Таким образом, $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz$.

Если в выражении $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$ положить $n=-1$, то получим $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz$. Видно, что $c_{-1} = \operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$, т.е. вычет функции $f(z)$ относительно особой точки z_0 равен коэффициенту при первой отрицательной степени в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана.

Теорема 1 (Коши). *Пусть* $f(z)$ *есть функция, аналитическая в замкнутой области* $\overline{E}$*, ограниченной контуром* Γ*, за исключением конечного числа особых точек* z_k*,* $k=1,2,\cdots n$*, лежащих внутри области. Тогда*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Res}}\, f(z)$$

► Вокруг точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ опишем окружности $c_{\rho_1}, c_{\rho_2}, \ldots, c_{\rho_n}$ столь малых радиусов $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, чтобы эти окружности попарно не пересекались и целиком лежали в области, ограниченной Γ (рис.1).

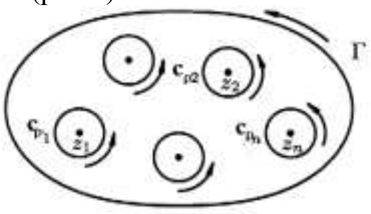


Рис.1.

Обозначим через Γ^* систему контуров, состоящую из контура Γ, проходимого в положительном направлении, и окружностей $c_{\rho_1}, c_{\rho_2}, \ldots, c_{\rho_n}$, проходимых в отрицательном направлении, т. е. $\Gamma^* = \Gamma^+ + c_{\rho_1}^- + c_{\rho_2}^- + \cdots + c_{\rho_n}^-$. Согласно основной теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^{*+}} f(z)dz = 0$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_{\rho_1}^-} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_{\rho_2}^-} f(z)dz \cdots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_{\rho_n}^-} f(z)dz = 0\,.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_{\rho_1}^+} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_{\rho_2}^+} f(z)dz \cdots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_{\rho_n}^+} f(z)dz\,.$$

Так как

$$\oint\limits_{c^+_{\rho_1}} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z),$$
$$\oint\limits_{c^+_{\rho_2}} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z), \ldots,$$
$$\oint\limits_{c^+_{\rho_n}} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z),$$

то

$$\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) + \cdots + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z). \blacktriangleleft$$

2. Вычисление вычетов функции. Пусть точка z_0 является изолированной особой точкой функции $f(z)$. Вычет $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ в точке z_0 можно найти либо по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz ,$$

либо по формуле $c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z_0)$. В первом случае нахождение вычета функции $f(z)$ сводится к вычислению интеграла, во втором случае – к разложению функции $f(z)$в ряд Лорана. Рассмотрим вычисление вычетов в различных особых точках.

Вычисление вычетов функции относительно устранимой особой точки. Пусть z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$. В этом случае в разложении в ряд Лорана отсутствует главная часть. Поэтому $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

Вычисление вычетов функции относительно полюса. *Случай 1.* **Простой полюс.** Пусть точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)$. Тогда в окрестности точки z_0 имеет место разложение в ряд Лорана функции $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k .$$

Умножая обе части этого равенства на $z - z_0$, получим

$$(z - z_0) \cdot f(z) = c_{-1} + (z - z_0) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k .$$

Так как в правой части равенства находится обыкновенный степенной ряд, то его сумма является непрерывной функцией в точке z_0. Переходя к пределу при $z \to z_0$ получим

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \lim_{z\to z_0} \left[(z - z_0)\cdot f(z)\right].$$

Замечание. Пусть функция $f(z)$ есть частное двух аналитических в точке z_0 функций $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. где $g(z_0) \neq 0$, $h(z)$ имеет простой нуль в точке z_0, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Тогда точка z_0 является простым полюсом функции $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ и

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)\cdot g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{\dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Случай 2. **Полюс порядка m.**

Пусть точка z_0 является m-кратным полюсом функции $f(z)$. Тогда в окрестности точки z_0 имеет место разложение в ряд Лорана функции $f(z)$

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k .$$

Умножая обе части равенства на $(z - z_0)^m$, получим

$$(z - z_0)^m \cdot f(z) =$$

$$= c_{-m} + c_{-m+1}\cdot(z - z_0) + \cdots + c_{-1}\cdot(z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+m} .$$

В правой части равенства находится степенной ряд, который равномерно сходится в любом круге, целиком лежащим в его круге сходимости. Поэтому возможно почленное дифференцирование этого ряда любое число раз в круге его сходимости. Дифференцируя последнее равенство $(m-1)$ раз, имеем

$$\frac{d^{m-1}\left[(z - z_0)^m \cdot f(z)\right]}{dz^{m-1}} =$$

$$= (m-1)!\cdot c_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (k+m)\cdot(k+m-1)\cdots(k+2)\cdot(z - z_0)^{k+1}$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$, получим

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]}{dz^{m-1}}.$$

Пример. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z-4}{z^3-z}$.

Решение. Особыми точками данной функции являются $z_1=0$ – полюс второго порядка и $z_2=1$ – простой полюс. Тогда имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z-4}{z^3-z}=\left.\frac{z-4}{\left(z^3-z\right)'}\right|_{z=1}=\left.\frac{z-4}{3z^2-1}\right|_{z=1}=\frac{1-4}{3\cdot1-1}=-\frac{3}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z-4}{z^3-z}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0}\left(\frac{z^2\cdot(z-4)}{z^3-z}\right)''=\lim_{z\to0}\left(\frac{z-4}{z-1}\right)''=\lim_{z\to0}\left(\frac{3}{(z-1)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{-6}{(z-1)^3}=6.$$

В ы ч и с л е н и е в ы ч е т о в ф у н к ц и и о т н о с и т е л ь н о с у щ е с т в е н н о о с о б о й т о ч к и. Пусть точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$. Тогда для вычисления вычета функции $f(z)$ в этой точке непосредственно определяют коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана.

Пример. Вычислить вычет функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

Решение. Точка $z=0$ является для функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ существенно особой точкой. Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\cdot z^2}+\cdots+\frac{1}{n!\cdot z^n}+\cdots.$$

Отсюда находим $\operatorname*{Res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}}=1$.

3. Логарифмический вычет. Пусть в области E задана однозначная функция $f(z)$, аналитическая всюду в E, за исключением конечного числа изолированных особых точек.

О п р е д е л е н и е 2. ***Логарифмической производной*** функции $f(z)$ называется функция

$$(\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

О п р е д е л е н и е 3. Логарифмическим вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке z_0 называется вычет в этой точке логарифмической производной функции $f(z)$:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(\ln f(z))' = \operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Теорема 2. *В нулях и полюсах функции $f(z)$, аналитической в области E, логарифмическая производная $(\ln f(z))'$ имеет полюсы первого порядка. При этом в нуле функции $f(z)$ логарифмический вычет равен порядку нуля функции $f(z)$. а в полюсе – порядку полюса функции $f(z)$, взятому со знаком минус.*

Без доказательства.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ – мероморфная функция в области E, Γ – замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком лежащий в области E и не проходящий через полюсы и нули функции $f(z)$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_\Gamma - P_\Gamma,$$

где N_Γ – сумма кратностей нулей функции $f(z)$, лежащих внутри Γ, P_Γ – сумма кратностей полюсов функции $f(z)$, лежащих внутри Γ.

► Пусть функция $f(z)$ мероморфна в области E и Γ – замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком лежащий в области E и не проходящий через нули и полюсы функции $f(z)$.

Пусть в области $E' \subseteq E$, ограниченной контуром Γ, нулями функции $f(z)$ являются точки $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ кратности $m_1, m_2, \ldots, m_k$, полюсами функции $f(z)$ являются точки $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_t$ кратности $n_1, n_2, \ldots, n_t$.

Применяя к функции $(\ln f(z))'$ основную теорему о вычетах и учитывая теорему 2, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz =$$

$$= \sum \operatorname{Res}\frac{f'(z)}{f(z)} = (m_1 + m_2 + \cdots + m_k) - (n_1 + n_2 + \cdots + n_t) = N_l - P_l \,. \blacktriangleleft$$

Определение 4. ***Логарифмическим вычетом*** функции $f(z)$ относительно контура Γ называется интеграл

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[\ln f(z)]' = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \,.$$

4. Вычет функции относительно точки $z = \infty$. Предположим, что бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой аналитической функции $f(z)$, т. е. функция $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.

Определение 5. ***Вычетом*** функции $f(z)$ ***относительно бесконечно удаленной точки*** $z = \infty$ называется интеграл

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^-} f(z)dz \,,$$

где Γ — замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком лежащий в той окрестности бесконечно удаленной точки, в которой функция $f(z)$ является аналитической.

Здесь интегрирование по контуру Γ совершается в отрицательном направлении, т. е. так, чтобы при обходе контура бесконечно удаленная точка оставалась слева.

В окрестности бесконечно удаленной точки, не содержащей других особых точек функции $f(z)$, кроме самой бесконечно удаленной точки, разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot z^k \,.$$

Так как ряд Лорана функции $f(z)$ сходится равномерно на контуре Γ, то этот ряд можно интегрировать почленно вдоль контура Γ.

Учитывая, что для $k = 0,1,\pm 2,\cdots$ $\oint\limits_{\Gamma^-} z^k dz = 0$ и $\oint\limits_{\Gamma^-} \frac{dz}{z} = -2\pi i$, то после интегрирования вдоль контура Γ равенства $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot z^k$, получим $\oint\limits_{l^-} f(z)dz = -2\pi i c_{-1}$. Отсюда $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$.

Таким образом, вычет функции $f(z)$ относительно бесконечно удаленной точки равен взятому с противоположным знаком коэффициенту при первой отрицательной степени в разложении Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки функции.

Теорема 4. *Если* $f(z)$ *– функция, аналитическая в каждой точке расширенной плоскости* $\mathbf{C}$, *за исключением конечного числа изолированных особых точек, то*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

► Опишем из точки $z = 0$ окружность такого радиуса R, чтобы все особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ функции $f(z)$, за исключением бесконечно удаленной точки $z = \infty$, лежали внутри этой окружности. Тогда по основной теореме о вычетах имеем

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z_k).$$

Отсюда $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z_k)$.

По определению вычета относительно бесконечно удаленной точки имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\Gamma^-} f(z)dz.$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{Res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.◄

Пример. Найти сумму вычетов функции $f(z) = \frac{z^6}{(z^2+4)^2 (z^2+1)^3}$ относительно всех ее особых точек, расположенных в комплексной плоскости.

Решение. Особыми точками данной функции являются: $z_{1,2} = \pm 2i$ – полюсы второго порядка, $z_{3,4} = \pm i$ – полюсы третьего порядка.

Применение основной теоремы теории вычетов связано с большими вычислениями. Для решения этого примера удобнее воспользоваться теоремой 4. Видно, что в бесконечно удаленной точке функция $f(z)$ имеет нуль первого порядка. Правильная часть ее разложения в ряд Лорана начинается с члена $\frac{1}{z}$.

Следовательно, $\operatorname*{Res}_{z=\infty} \dfrac{z^6}{(z^2+4)^2 (z^2+1)^3} = -1$.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{4} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \dfrac{z^6}{(z^2+4)^2 (z^2+1)^3} = 1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется вычетом функции?
2. Сформулируйте и докажите основную теорему о вычетах.
3. Как вычисляется вычет относительно устранимой точки?
4. Как вычисляется вычет относительно простого полюса?
5. Как вычисляется вычет относительно полюса порядка m?
6. Как вычисляется вычет относительно существенно особой точки?
7. Что называется логарифмическим вычетом?
8. Как вычисляется вычет относительно бесконечно удаленной точки?

Лекция 10. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ

1. Вычисление определенных интегралов от функции комплексного переменного.
2. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов.

1 Вычисление определенных интегралов от функции комплексного переменного. В ы ч и с л е н и е и н т е г р а л о в п о з а м к н у т о м у к о н т у р у. Основная теорема о вычетах часто используется для вычисления интегралов комплексного переменного по замкнутому контуру.

Пример. Вычислить $\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)}$, где

$$\Gamma=\{z\in\mathbf{C}:|z-1-i|=2\}.$$

Решение. В круге $\Gamma=\{z\in\mathbf{C}:|z-1-i|=2\}$ функция $f(z)=\frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}$ имеет в точке $z_1=1$ полюс третьего порядка, в точках $z_{2,3}=\pm i$ полюсы первого порядка, причем точка $z=-i$ не принадлежит кругу $|z-1-i|<2$.

Тогда

$$\oint\limits_{l}\frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)}=2\pi i\cdot\left[\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}+\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\left(\frac{(z-1)^3}{(z-1)^3(z^2+1)}\right)''+\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-1)^3(z+i)(z-i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\frac{1}{(z^2+1)}\right)''+\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^3(z+i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\left(\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right)'+\frac{1}{(i-1)^3(i+i)}\right]=$$

$$=2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\frac{2\cdot(z^2+1)^2-2z\cdot2\cdot(z^2+1)\cdot2z}{(z^2+1)^4}+\frac{1}{2i\cdot(i-1)^3}\right]=$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \lim_{z \to 1} \frac{2 \cdot (z^2+1)(z^2+1-4z^4-4z^2)}{(z^2+1)^4} - \frac{i}{2 \cdot (i-1)^3} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[-\frac{i}{2 \cdot (i-1)^3} + \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \to 1} \frac{2 \cdot (1-4z^4-z^2)}{(z^2+1)^4} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \left[\frac{2(1-4-1)}{(1+1)^4} - \frac{i}{2 \cdot (i-1)^3} \right] = -\frac{\pi}{2}(1+i).$$

В ы ч и с л е н и е и н т е г р а л о в о т р а ц и о н а л ь н ы х ф у н к ц и й. Пусть $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – рациональная функция, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $n \ge m+2$, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sigma$, где σ – сумма вычетов функции $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости $\{z \in \mathbf{C} | \ \operatorname{Im} z \ge 0\}$.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ – четная, то $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Введем функцию $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$, которая на действительной оси (при $z = x$) совпадает $f(x)$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости $\{z \in \mathbf{C} | \ \operatorname{Im} z \ge 0\}$ полюс второго порядка в точке $z = ai$. Вычет $f(z)$ относительно этого полюса равен

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} f(z) = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz}\left[f(z)(z-ai)^2 \right] =$$

$$= \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2} \right] = \lim_{z \to ai} \frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{1}{4ai}.$$

Тогда $I = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \dfrac{1}{4\pi i} = \dfrac{\pi}{4a}$.

Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, ограниченная внутри промежутка интегрирования. С помощью замены

$$e^{ix} = z\,,\; dx = \frac{dz}{iz}\,,\; \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}\,,\; \sin x = \frac{z^2 - 1}{2i\,z}$$

интеграл $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции $F(z)$ комплексного переменного z по окружности $|z| = 1$.

К интегралу $\oint\limits_{|z|=1} F(z)dz$ применима основная теорема о вычетах. Тогда $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = 2\pi\, i \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}\limits_{z=z_k} F(z)$.

Пример. Вычислить интеграл $J = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{2 - 2\cos x}$.

Решение. Введем замену $z = e^{ix}$. Тогда

$$dx = \frac{dz}{iz}\,,\; \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Подставим в интеграл

$$J = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\dfrac{dz}{i\,z}}{2 - 2 \cdot \dfrac{z^2 + 1}{2z}} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{i\left(2z - z^2 - 1\right)} = i \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(z - 1)^2}.$$

Функция $F(z) = \dfrac{1}{(z - 1)^2}$ в точке $z = 1$ имеет простой полюс 2-го порядка. Поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z-1)^2}\right]'=0\,.$$

Отсюда $J=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{2-2\cos x}=0$.

Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$**.** Вычисление этих интегралов основано на следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x)$, *заданная на всей числовой оси* $-\infty<x<+\infty$, *может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im}z\ge 0$. *Функция* $f(z)$ *является аналитической в верхней полуплоскости* $\{z\in\mathbf{C}\,|\ \operatorname{Im}z\ge 0\}$ *за исключением конечного числа изолированных точек* z_1, z_2, ..., z_n. *И пусть существуют такие положительные числа* M, R_0, δ, *что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию* $|z|=R>R_0$, *имеет место оценка* $|f(z)|<\frac{M}{|z|^{1+\delta}}$. *Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ *существует и вычисляется по формуле*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z).$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^3}$ определена на всей действительной оси $-\infty<x<+\infty$. Ее аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}z\ge 0$ функция $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}$ является аналитической в каждой точке верхней полуплоскости за исключением точки $z=i$, являющейся полюсом 3-го порядка. На действительной оси полюсов нет При этом для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| = R > R_0 > 1$ имеет место оценка

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{(z^2+1)^3}\right| < \frac{1}{|z|^6}.$$

Поэтому для исходного интеграла можно применить теорему 1

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{(z-i)^3}{(z^2+1)^3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\frac{1}{(x^2+1)^3} = 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

Интегралы вида $\int_0^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$, $\int_0^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$**.** Интегралы вида $\int_0^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$, $\int_0^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$, где $R(x)$ – рациональная функция, $\lambda > 0$ любое действительное число вычисляются с использованием леммы Жордана.

Лемма Жордана. *Пусть* $g(z)$ *– аналитическая в верхней полуплоскости* $(0 < \arg z < \pi)$*, за исключением конечного числа особых точек, и стремится в этой полуплоскости к нулю при* $|z| \to \infty$*. Тогда при* $\lambda > 0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0,$$

где контур C_R *– полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке 0 и радиусом* R *(рис.1.).*

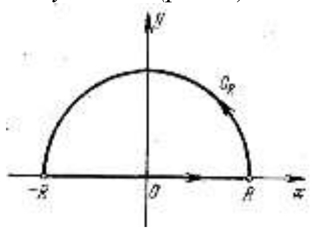


Рис.1.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+k^2} dx$, где $a > 0$, $k > 0$.

Решение. Введем вспомогательную функцию

$$f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}.$$

Видно, если $z = x$, то $f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией $\varphi(x) = \frac{x \sin ax}{x^2+k^2}$. Рассмотрим контур, указанный на рисунке 1. При достаточно большом R на контуре C_R функция $g(z) = \frac{z}{z^2+k^2}$ удовлетворяет неравенству $|g(z)| \le \frac{R}{R^2-k^2}$. Следовательно, $g(z) \to 0$ при $R \to \infty$.

Значит, по лемме Жордана: $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2} dz = 0$.

Для любого $R > k$ для любого замкнутого контура (рис.1) по теореме о вычетах имеем:

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2} dx + \int\limits_{C_R} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2} dx = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}.$$

Вычислим вычет:

$$\operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2} = \lim_{z\to ik} \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}(z-ik) = \frac{1}{2} e^{-ak}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2} dx + \int\limits_{C_R} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{-ak} = \pi i e^{-ak}.$$

В пределе при $R \to \infty$ получим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+k^2} dx = \pi i e^{-ak}$.

Учитывая формулу Эйлера:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos \lambda x}{x^2+k^2} dx + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2+k^2} dx = \pi i e^{-ak}$$

Отделяя слева и справа вещественные и мнимые части, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx = \pi e^{-ak}.$$

В силу того, что подынтегральная функция четная, окончательно получим $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ak}$.

2. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов. Вычисление некоторых рядов с помощью теории вычетов основано на следующих теоремах.

Теорема 2. *Пусть 1)* $f(z)$ *аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа полюсов* z_1, z_2, ..., z_n *(отличными от целых чисел), 2) функция* $f(z)$ *удовлетворяет условию* $f(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ *при* $z \to \infty$. *Тогда справедлива формула:*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = -\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)\right].$$

Теорема 3. *Пусть 1)* $f(z)$ *аналитичнаво всей комплексной плоскости за исключением конечного числа полюсов* z_1, z_2, ..., z_n *(отличными от целых чисел), 2) функция* $f(z)$ *удовлетворяет условию*

$f(z) \le \mathrm{e}^{a|\operatorname{Im} z|}\varepsilon(|z|)$ *при* $z \to \infty$, $z \in G_\rho$, $0 \le a < \pi$,

$G_\rho = \mathrm{C} \setminus \{z|\ |z-z_1| \le \rho, |z-z_2| \le \rho, ..., |z-z_n| \le \rho\}$.

Тогда справедлива формула:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(k) = -\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{f(z)}{\sin(\pi z)}.$$

Пример. Найти сумму ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$. Эта функция аналитична всюду на $\mathbf{C}$, кроме точек $z_1 = -2i$ и $z_2 = 2i$, которые являются простыми полюсами.

Поскольку

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4}=\frac{1}{z^2\left(1+\dfrac{4}{z^2}\right)},$$

то $\dfrac{1}{z^2+4}=O\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$ при $z\to\infty$.

Применяя теорему 2, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=-\pi\left[\operatorname*{Res}_{z=-2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^2+4}\right]=$$

$$=-\pi\left[\lim_{z\to-2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z}+\lim_{z\to 2i}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{2z}\right]=-\pi\left[\frac{\operatorname{ctg}(-2i\pi)}{-2i\cdot 2}+\frac{\operatorname{ctg}(2i\pi)}{2i\cdot 2}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}\operatorname{cth}2\pi.$$

Ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+4}$ можно записать в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}=\ldots+\frac{1}{(-2)^2+4}+\frac{1}{(-1)^2+4}+\frac{1}{0^2+4}+\frac{1}{1^2+4}+\frac{1}{2^2+4}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+4}.$$

Отсюда находим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+4}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+4}-\dfrac{1}{8}$.

Искомая сумма данного ряда равна $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+4}=\dfrac{\pi}{4}\operatorname{cth}2\pi-\dfrac{1}{8}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какого вида интегралы могут быть вычислены с помощью вычетов?

2. В каких случаях можно вычислить сумму ряда с помощью вычетов?

ТЕМА 2
ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Лекция 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

1. Оригиналы и их свойства.
2. Изображения и свойства изображений.
3. Свойства преобразования Лапласа.

1. Оригиналы и их свойства. Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция действительного переменного t, определенная на интервале $-\infty < t < +\infty$.

Определение 1. Любая комплекснозначная функция $f(t)$ называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) при $t \ge 0$ функция $f(t)$ кусочно-непрерывна, т.е. на любом конечном участке оси t имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода;

3) при $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т. е. существует такое положительное постоянное M и такое неотрицательное постоянное s_0, что для всех $t \ge 0$ выполняется неравенство $|f(t)| \le M \cdot e^{s_0 t}$, $M > 0$, $s_0 \ge 0$. Число s_0 называется ***показателем роста*** функции $f(t)$.

Свойства оригиналов

1. Если $f(t)$ — оригинал с показателем роста s_0, то $|f(t)|$ является оригиналом с тем же показателем роста.

2. Если $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ – оригиналы с показателями роста s_1, s_2, ..., s_n, то функция

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots c_n f_n(t),$$

где c_1, c_2, ..., c_n – постоянные (действительные или комплексные), является также оригиналом с показателем роста s_0, равным наибольшему из чисел s_1, s_2, ..., s_n:

$$s_0 = \max\{s_1, s_2, ..., s_n\}.$$

3. Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0, то являются оригиналами следующие функции:

– функция $f_1(t)=f(\alpha\cdot t)$, $\alpha>0$, имеющая показатель роста, равный $\alpha\cdot s_0$;

– функция $f_2(t)=e^{\lambda t}f(t)$ (λ — действительное или комплексное число), показатель роста которой равен

$$s=\begin{cases} s_0+\operatorname{Re}\lambda, & \text{если } s_0+\operatorname{Re}\lambda>0,\\ 0, & \text{если } s_0+\operatorname{Re}\lambda<0.\end{cases}$$

– функция $f_3(t)=\begin{cases} 0, & \text{если } t<\tau,\\ f(t-\tau), & \text{если } t\ge\tau.\end{cases}$, $\tau>0$, имеющая показатель роста, равный s_0;

– функция $f_4(t)=t^z\cdot f(t)$, (z — действительное или комплексное число), показатель роста которой равен s_0.

4. Если $f(t)$ — оригинал с показателем роста s_0, то функция $g(t)=\int\limits_0^t f(z)dz$ на интервале $0\le t<\infty$ является непрерывным оригиналом с показателем роста s_0.

Пример. Функция

$$\eta(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } t\ge 0,\\ 0 & \text{при } t<0\end{cases}$$

называется ***единичной функцией Хевисайда***. Функция $\eta(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0=0$.

Пусть функция $f(t)$ определена на интервале $-\infty<t<\infty$; и удовлетворяет условиям 2) и 3) определения 1, но $f(t)\neq 0$ при $t<0$. Тогда функция

$$f(t)\eta(t)=\begin{cases} f(t) & \text{при } t\ge 0,\\ 0 & \text{при } t<0\end{cases}$$

является оригиналом.

Пример. Найти показатель роста функции $f(t)=\mathrm{e}^{at}$, где a – действительное или комплексное число.

Решение. Если $\operatorname{Re}a>0$, то для функции $f(t)=\mathrm{e}^{at}$ показатель ее роста $s_0=\operatorname{Re}a>0$. Если $\operatorname{Re}a<0$, то функция $\left|\mathrm{e}^{at}\right|$ является ограниченной и $s_0=0$.

2. Изображения и свойства изображений.

Определение 2. ***Изображением*** (***интегралом Лапласа***) оригинала $f(t)$ называется несобственный интеграл

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

зависящий от комплексного параметра p.

Определение 3. ***Преобразованием Лапласа*** называется операция перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде $f(t)\doteq F(p)$.

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0>0$.

Теорема 1 (существование изображения). *Для любого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ существует в полуплоскости $\operatorname{Re} p=u>s_0$, где s_0 – показатель роста функции $f(t)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости.*

►Пусть $p=u+iv$, произвольная точка полуплоскости $\operatorname{Re} p=u>s_0$. Учитывая, что

$$|f(t)|\le M\cdot e^{s_0 t},\quad u-s_0>0,$$

$$\left|e^{-pt}\right|=\left|e^{-ut}\cdot e^{-ivt}\right|=e^{-ut}\cdot|\cos vt-i\sin vt|=e^{-ut},$$

имеем

$$\left|\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt\right|\le\int_0^{\infty}\left|f(t)\cdot e^{-pt}\right|dt\le M\cdot\int_0^{\infty}e^{s_0 t}\cdot\left|e^{-pt}\right|dt=M\cdot\int_0^{\infty}e^{s_0 t}\cdot e^{-ut}dt=$$

$$=M\cdot\int_0^{\infty}e^{-t(u-s_0)}dt\le\frac{M}{u-s_0}.$$

Таким образом,

$$|F(p)|=\left|\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt\right|\le\frac{M}{u-s}.$$

Отсюда на основании признака сравнения сходимости несобственных интегралов следует абсолютная сходимость интеграла

Лапласа. Значит, изображение $F(p)$ существует и однозначно в полуплоскости $\operatorname{Re} p = u > s_0$. ◄

Теорема 2 (необходимый признак существования изображения). *Если функция* $F(p)$ *является изображением функции* $f(t)$, *то* $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to\infty} F(p) = 0$.

► Справедливость данной теоремы непосредственно вытекает из неравенства $\left|\int\limits_0^\infty f(t)\cdot \mathrm{e}^{-pt}\, dt\right| \le \dfrac{M}{u-s_0}$. ◄

Теорема 3 (единственность оригинала). *Если функции* $F(p)$ *и* $\Phi(p)$ *совпадают, то совпадают между собой и соответствующие оригиналы* $f(t)$ *и* $\varphi(t)$ *во всех точках, в которых они непрерывны.*

Без доказательства.

Пример. Найти изображения функций

1) единичной функцией Хевисайда $\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \ge 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$

2) $f(t) = e^{at}$, где a – действительное или комплексное число.

Решение. 1. По формуле $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ при $u = \operatorname{Re} p > 0$ находим

$$F(p) = \int\limits_0^\infty 1\cdot e^{-pt} dt = \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^N 1\cdot e^{-pt} dt = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^N\right) = \frac{1}{p}.$$

Итак, $\eta(t) \doteq \dfrac{1}{p}$.

2. По формуле $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ при $\operatorname{Re}(p-a) > 0$ имеем

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{at}\cdot e^{-pt} dt = \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^N e^{-(p-a)t} dt = -\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t}\Big|_0^N\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{e^{-(p-a)N}}{p-a}\right) = \frac{1}{p-a}.$$

Итак, $e^{at} \doteq \dfrac{1}{p-a}$ при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$.

Замечание. Функция $F(p) = \dfrac{1}{p-a}$ является аналитической не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$, но и на всей комплексной плоскости, кроме точки $p = a$. Такая особенность наблюдается и для многих изображений.

3. Свойства преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа обладает следующими с в о й с т в а м и .

1 (линейность). *Линейной комбинации оригиналов соответствует линейная комбинация изображений, т.е. если* $f_1(t) \doteq F_1(p)$ *и* $f_2(t) \doteq F_2(p)$ *и* c_1, c_2 *– постоянные числа, то*

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \doteq c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p).$$

► Находим изображение для функции $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$:

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \to \int_0^\infty [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] \cdot e^{-pt} dt =$$

$$= c_1 \int_0^\infty f_1(t) \cdot e^{-pt} dt + c_2 \int_0^\infty f_2(t) \cdot e^{-pt} dt = c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p). \blacktriangleleft$$

2 (подобие). *Если* $f(t) \doteq F(p)$ *и* $\lambda > 0$, *то*

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

► Находим изображение для функции $f(\lambda t)$

$$f(\lambda t) \doteq \int_0^\infty f(\lambda t) \cdot e^{-pt} dt = \begin{bmatrix} \text{замена } y = \lambda t, \\ t = \dfrac{y}{\lambda},\ dt = \dfrac{1}{\lambda} dy \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty f(y) \cdot e^{-\frac{p}{\lambda} y} dy =$$

$$= \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \blacktriangleleft$$

3 (запаздывание). *Если* $f(t) \doteq F(p)$ *и* $\tau > 0$, *то*

$$f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} \cdot F(p).$$

► Находим изображение для функции $f(t-\tau)$

$$f(t-\tau) \doteq \int_0^\infty f(t-\tau)\cdot e^{-pt}dt = \left[\begin{array}{l}\text{замена } y = t-\tau, \\ t = y+\tau,\, dt = dy, \\ t = 0 \Rightarrow y = -\tau, \\ t = \infty \Rightarrow y = \infty.\end{array}\right] = \int_{-\tau}^{\infty} f(y)\cdot e^{-p\cdot(y-\tau)}dy =$$

$$= \int_0^\infty f(y)\cdot e^{-p\cdot y}e^{-p\tau}dy = e^{-p\tau}\cdot\int_0^\infty f(y)\cdot e^{-p\tau}dy = e^{-p\tau}\cdot F(p). \blacktriangleleft$$

Графики функций $f(t)$ и $f(t-\tau)$ имеют одинаковый вид, но график $f(t-\tau)$ сдвинут на τ единиц вправо. Это означает, что процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается с опозданием на время τ относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$ (рисунок 1. 1).

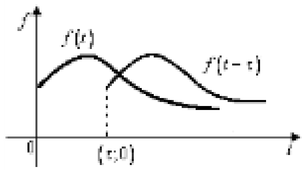


Рисунок 1. 1 – Геометрический смысл свойства запаздывания

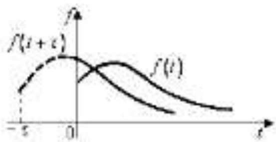


Рисунок 1. 2 – Геометрический смысл свойства опережения

Графики функций $f(t)$ и $f(t-\tau)$ имеют одинаковый вид, но график $f(t-\tau)$ сдвинут на τ единиц вправо. Это означает, что процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается с опозданием на время τ относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$ (рис.1).

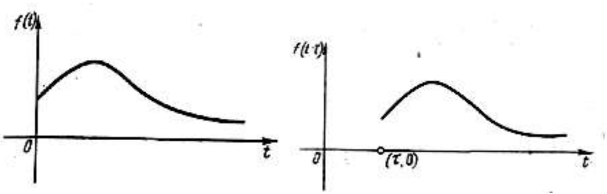


Рис.1.

4 (опережение). *Если* $f(t) \doteq F(p)$, *то*

$$f(t+\tau) \doteq e^{p\tau}\left[F(p)-\int_0^{\tau} f(t)e^{-pt}dt\right].$$

► Находим изображение для функции $f(t+\tau)$

$$f(t+\tau) \doteq \int_0^{\infty} f(t+\tau)\cdot e^{-pt}dt = \begin{bmatrix} \text{замена } y=t+\tau, \\ t=y-\tau,\ dt=dy, \\ t=0 \Rightarrow y=\tau, \\ t=\infty \Rightarrow y=\infty. \end{bmatrix} = \int_{\tau}^{\infty} f(y)e^{-p(y-\tau)}dy =$$

$$= e^{p\tau}\cdot\left(\int_0^{\infty} f(y)\cdot e^{-py}dy - \int_0^{\tau} f(y)\cdot e^{-py}dy\right) =$$

$$= e^{p\tau}\cdot\left(F(p)-\int_0^{\tau} f(y)\cdot e^{-py}dy\right). \blacktriangleleft$$

Графики функций $f(t)$ и $f(t+\tau)$ изображены на рисунке 2.

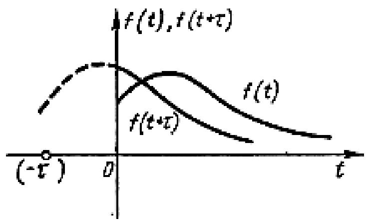


Рис.2.

5 (изображение периодической функции). *Если оригинал $f(t)$ имеет период T, т.е. $f(t\pm T)=f(t)$, то она может быть представлена в виде сходящегося ряда*

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_0(t-nT),$$

где $f_0(t)=\begin{cases} f(t) & \text{при } 0<t<T, \\ 0 & \text{при } t<0 \text{ и } t>T. \end{cases}$

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} f_0(t-nt) \doteq F_0(p)\cdot\dfrac{1}{1-e^{-pT}}$.

► На основании теоремы запаздывания, имеем

$f_0(t-T) \doteq e^{-pT}F_0(p)$,

$f_0(t-2T) \doteq e^{-2pT} F_0(p),$

.... ,

$f_0(t-nT) \doteq e^{-npT} F_0(p),$

где $F_0(p)$ – изображение функции $f(t)$ на начальном периоде.

Поэтому при достаточно больших p, $\operatorname{Re} p > s_0$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t-nt) \doteq F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT} F_0(p) = F_0(p) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT} =$$

$$= F_0(p) \cdot \frac{1}{1-e^{-pT}} \blacktriangleleft.$$

Пример. Найти изображение π-периодичной функции $f(t) = |\sin t|$ при $0 \le t \le \pi$, график которой представлен на рисунке 3.

Решение. Учитывая предыдущий пример, имеем

$$|\sin t| \doteq \frac{1}{1-e^{-\pi \cdot p}} \cdot \int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{1-e^{-\pi \cdot p}} \cdot \left. \frac{e^{-pt}(p \sin t - \cos t)}{p^2+1} \right|_0^{\pi} =$$

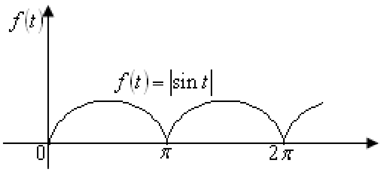


Рис.3.

$$= \frac{1+e^{-\pi p}}{(1-e^{-\pi p}) \cdot (p^2+1)}.$$

6 (затухание (смещение)). *Если* $f(t) \doteq F(p)$ *и* a *– постоянное число, то*

$$e^{at} \cdot f(t) \doteq F(p-a).$$

► Находим изображение для функции $e^{at} \cdot f(t)$

$$e^{at} \cdot f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{at} \cdot f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(p-a)t} dt = F(p-a)$$

при $\operatorname{Re}(p-a) \ge s_0$.◄

7 (дифференцирование оригинала). *Если* $f(t) \doteq F(p)$ *и функции* $f'(t)$, $f''(t), \ldots,$ $f^{(n)}(t)$ *являются оригиналами, то*

$$f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0),$$
$$f''(t) \doteq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0),$$
$$f'''(t) \doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

► Находим изображение для функции $f'(t)$

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-pt} dt = \begin{bmatrix} \text{интегрируем по частям} \\ u = e^{-pt}, dv = f'(t)dt, \\ du = -p \cdot e^{-pt} dt, v = f(t) \end{bmatrix} = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{\infty} +$$

$$+ p\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(0) + p \cdot F(p).$$

Находим изображение для функции $f''(t)$, используя пункт 1:

$$f''(t) = (f'(t))' \doteq p \cdot (p \cdot F(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогично находятся изображения производных 3-го, 4-го и т.д. порядков.◄

8 (дифференцирование изображения). *Если* $f(t) \doteq F(p)$, *то*

$$F'(p) \doteq -t \cdot f(t),$$
$$F''(p) \doteq t^2 \cdot f(t),\text{т}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t).$$

► Изображение $F(p)$ согласно теореме 1 является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = u > s_0$. Следовательно, у нее существуют производные любого порядка. Функции $(-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)$ являются оригиналами с показателями роста s_0. Поэтому $\left|(-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)\right| \le M \cdot e^{s_1 t}$, где $s_1 > s_0$.

Тогда получаем $\left|(-1)^n \cdot t^n \cdot f(t) \cdot e^{-pt}\right| \le M \cdot e^{-(u-s_1)t} < M \cdot e^{-(s_2 - s_1)t}$,

где $s_2 > s_1 > s_0$, $\operatorname{Re} p = u > s_2$.

Так как интеграл $\int_0^\infty Me^{-(s_2-s_1)t}dt$ существует, несобственный интеграл $\int_0^\infty (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)\cdot e^{-pt}dt$ равномерно сходится относительно p в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = u \ge s_2 > s_0$. Тогда возможно дифференцирование под знаком несобственных интегралов и

$$F'(p) = \left(\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt\right)' = \int_0^\infty \left(f(t)\cdot e^{-pt}\right)' dt = \int_0^\infty f(t)\cdot(-t)\cdot e^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^\infty (-t\cdot f(t))\cdot e^{-pt}dt \doteq -t\cdot f(t),$$

$F''(p) = (F'(p))' \to -t\cdot(-t\cdot f(t)) = t^2\cdot f(t)$ и так далее. ◄

9 (изображение оригинала (интегрирование оригинала). *Если* $f(t) \doteq F(p)$, *то*

$$\int_0^t f(z)dz \doteq \frac{1}{p}F(p).$$

► По свойству 4 оригиналов имеем, что функция $\varphi(t) = \int_0^t f(z)dz$ является оригиналом с показателем роста s_0 и $\varphi(0) = 0$.

Так как $\varphi'(t) = f(t)$, то $\varphi'(t)$ также оригинал с показателем роста s_0. Пусть $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$. Используя свойство изображения производной оригинала, имеем $f(t) \doteq p\cdot\Phi(p)$. Так как $f(t) \doteq F(p)$, то $F(p) = p\cdot\Phi(p)$.

Отсюда $\Phi(p) = \dfrac{1}{p}F(p)$

или $\int_0^t f(z)dz \doteq \dfrac{1}{p}F(p)$, при $\mathrm{Re}\, p = u > s_0$. ◄

Следствие. *Пусть* $f(t)$ *– непрерывный оригинал на интервале* $0 \le t < \infty$, $f(t) \doteq F(p)$ *и существует несобственный интеграл* $\int_0^\infty f(t)dt$. *Тогда имеет место соотношение* $\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{p\to 0} F(p)$.

10 (интегрирование изображения). *Если* $f(t) \doteq F(p)$ *и интеграл* $\int_p^\infty F(\rho)d\rho$ *сходится, то*

$$\int_p^\infty F(\rho)d\rho \doteq \frac{f(t)}{t}.$$

► Имеем

$$\int_p^\infty F(\rho)d\rho = \int_p^\infty \left(\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-\rho t}dt \right) d\rho = \int_0^\infty \left(\int_\rho^\infty e^{-\rho t}d\rho \right)\cdot f(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t}\cdot e^{-\rho t}\Big|_p^\infty \right)\cdot f(t)dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\cdot e^{-pt}dt. ◄$$

Следствие. *Пусть*

1) $\dfrac{f(t)}{t}$ *– оригинал непрерывный на* $0 \le t < \infty$,

2) $f(t) \doteq F(p)$,

3) несобственный интеграл $\int_0^\infty \dfrac{f(t)}{t}dt$ *сходится.*

Тогда имеет место равенство $\int_0^\infty \dfrac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty F(x)dx$.

$1 \doteq \dfrac{1}{p}$;	$e^{at}\cdot t^n \doteq \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$;
$e^{at} \doteq \dfrac{1}{p-a}$;	$t\cdot\sin wt \doteq \dfrac{2wp}{\left(p^2+w^2\right)^2}$;
$t \doteq \dfrac{1}{p^2}$;	$t\cdot\cos wt \doteq \dfrac{p^2-w^2}{\left(p^2+w^2\right)^2}$;

$$\sin wt \risingdotseq \frac{w}{p^2+w^2};$$

$$\cos wt \risingdotseq \frac{p}{p^2+w^2};$$

$$\mathrm{sh}\, wt \risingdotseq \frac{w}{p^2-w^2};$$

$$\mathrm{ch}\, wt \risingdotseq \frac{p}{p^2-w^2};$$

$$e^{at}\cdot \sin wt \risingdotseq \frac{w}{(p-a)^2+w^2};$$

$$e^{at}\cdot \cos wt \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2+w^2};$$

$$e^{at}\cdot \mathrm{sh}\, wt \risingdotseq \frac{w}{(p-a)^2-w^2};$$

$$e^{at}\cdot \mathrm{ch}\, wt \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2-w^2};$$

$$t^n\,, \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}},\ n\in\mathbb{N};$$

$$t\cdot \mathrm{sh}\, wt \risingdotseq \frac{2wp}{\left(p^2-w^2\right)^2};$$

$$t\cdot \mathrm{ch}\, wt \risingdotseq \frac{p^2+w^2}{\left(p^2-w^2\right)^2};$$

$$e^{at}\cdot t\cdot \sin wt \risingdotseq \frac{2w(p-a)}{\left((p-a)^2+w^2\right)^2};$$

$$e^{at}\cdot t\cdot \cos wt \risingdotseq \frac{(p-a)^2-w^2}{\left((p-a)^2+w^2\right)^2};$$

$$\frac{1}{2w^3}(\sin wt - wt\cos wt) \risingdotseq \frac{1}{\left(p^2+w^2\right)^2};$$

$$\frac{1}{2w^3}(wt\,\mathrm{ch}\, wt - \mathrm{sh}\, wt) \risingdotseq \frac{1}{\left(p^2-w^2\right)^2};$$

$$\sin(wt\pm\varphi) \risingdotseq \frac{w\cos\varphi \pm p\sin\varphi}{p^2+w^2};$$

$$\cos(wt\pm\varphi) \risingdotseq \frac{p\cos\varphi \mp w\sin\varphi}{p^2+w^2}.$$

В таблице 1 приведены изображения некоторых функций (оригиналов).

Таблица 1

№	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin wt$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
5	$\cos wt$	$\frac{p}{p^2+w^2}$

6	$\operatorname{sh} wt$	$\dfrac{w}{p^2 - w^2}$
7	$\operatorname{ch} wt$	$\dfrac{p}{p^2 - w^2}$
8	$e^{at} \cdot \sin wt$	$\dfrac{w}{(p-a)^2 + w^2}$
9	$e^{at} \cdot \cos wt$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2 + w^2}$
10	$e^{at} \cdot \operatorname{sh} wt$	$\dfrac{w}{(p-a)^2 - w^2}$
11	$e^{at} \cdot \operatorname{ch} wt$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2 - w^2}$
12	t^n, n – целое число	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{at} \cdot t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
14	$t \cdot \sin wt$	$\dfrac{2wp}{\left(p^2 + w^2\right)^2}$
15	$t \cdot \cos wt$	$\dfrac{p^2 - w^2}{\left(p^2 + w^2\right)^2}$
16	$t \cdot \operatorname{sh} wt$	$\dfrac{2wp}{\left(p^2 - w^2\right)^2}$
17	$t \cdot \operatorname{ch} wt$	$\dfrac{p^2 + w^2}{\left(p^2 - w^2\right)^2}$
18	$e^{at} \cdot t \cdot \sin wt$	$\dfrac{2w(p-a)}{\left((p-a)^2 + w^2\right)^2}$
19	$e^{at} \cdot t \cdot \cos wt$	$\dfrac{(p-a)^2 - w^2}{\left((p-a)^2 + w^2\right)^2}$
20	$\dfrac{1}{2w^3}(\sin wt - wt \cos wt)$	$\dfrac{1}{\left(p^2 + w^2\right)^2}$

21	$\dfrac{1}{2w^3}(wt\,\mathrm{ch}\,wt - \mathrm{sh}\,wt)$	$\dfrac{1}{\left(p^2 - w^2\right)^2}$
22	$\sin(wt \pm \varphi)$	$\dfrac{w\cos\varphi \pm p\sin\varphi}{p^2 + w^2}$
23	$\cos(wt \pm \varphi)$	$\dfrac{p\cos\varphi \mp w\sin\varphi}{p^2 + w^2}$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение оригинала и перечислите их свойства.
2. Что называется изображением? Перечислите свойства изображений.
3. Дайте определение преобразования Лапласа. Перечислите свойства преобразования Лапласа.

Лекция 2. ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

1.Свертка функций.
2. Теоремы разложения.
3. Обращение преобразования Лапласа.
4.Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье.

1. Свертка функций.

Теорема 1 (умножение изображений). *Если* $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0'$, *и* $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0''$, *то*

$$F_1(p)\cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau\,,\ \operatorname{Re} p > \max\left\{s_0', s_0''\right\}.$$

► *Шаг 1.* Докажем, что функция $\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,d\tau$ является оригиналом.

Условия 1) и 2) очевидны. Возьмем $s_0 = \max\left\{s_0', s_0''\right\}$ и $M = \max\{M_1, M_2\}$.

Тогда

$$|f_1(t)| \le M_1\,\mathrm{e}^{s_0' t} \le M\,\mathrm{e}^{s_0 t} \text{ и } |f_2(t)| \le M_2\,\mathrm{e}^{s_0'' t} \le M\,\mathrm{e}^{s_0 t}\,.$$

Следовательно,

$$|\varphi(t)| = \left|\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\right| \le \int_0^t |f_1(\tau)|\cdot|f_2(t-\tau)|d\tau < M^2\int_0^t e^{s_0 t}e^{s_0(t-\tau)}d\tau =$$

$$= M^2 t e^{s_0 t}.$$

Так как при любом малом $\varepsilon > 0$ справедливо $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{\varepsilon t}} = 0$, то функция $g(t) = \dfrac{t}{e^{\varepsilon t}}$ ограничена на интервале $0 \le t < \infty$, т.е. $\dfrac{t}{e^{\varepsilon t}} \le A$. Отсюда $t \le A\cdot e^{\varepsilon t}$.

Тогда $|\varphi(t)| < M^2 t e^{s_0 t} \le AM^2 e^{(s_0+\varepsilon)\cdot t}$. При $\varepsilon \to 0$ имеем, что функция $\varphi(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$ имеет ограниченный рост, показатель которого равен s_0.

Шаг 2. Докажем формулу $F_1(p)\cdot F_2(p) \doteq \int\limits_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$.

Используя преобразование Лапласа, можно записать

$$\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau \doteq \int_0^\infty\left(\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\right)\cdot \mathrm{e}^{-pt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau.$$

Область S интегрирования данного двойного интеграла определяется условиями $0 \le t < \infty$ и $0 \le \tau \le t$.

Изменяя порядок интегрирования и полагая $y = t - \tau$ (рис.1),

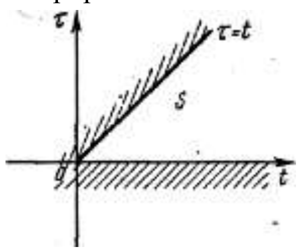


Рис.1.

получим

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \doteq \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau) dt =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty f_2(y) e^{-py} dy = F_1(p) F_2(p). \blacktriangleleft$$

Определение 1. Функция вида $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ называется ***сверткой*** функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Обозначается: $f_1(t) * f_2(t)$, т.е.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau .$$

Положим $y = t - \tau$. Тогда

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \begin{bmatrix} y = t - \tau, \\ \tau = t - y. \end{bmatrix} = -\int_t^0 f_1(t-y) \cdot f_2(y) dy =$$

$$= \int_0^t f_2(y) \cdot f_1(t-y) dy .$$

Видно, что свертка обладает свойством коммутативности.

Учитывая понятие свертки, теорему умножения можно записать в виде

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) \cdot F_2(p) .$$

Следствие (формула Дюамеля). *Пусть* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ *– оригиналы,* $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0'$, *и* $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0''$, *причем* $f_2'(t)$ *также является оригиналом. Тогда имеет место равенство*

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2'(t-\tau) d\tau + f_1(t) \cdot f_2(0),$$

где $\operatorname{Re} p > \max\{s_0', s_0''\}$.

►Запишем произведение $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p)$ в виде

$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) - f_2(0) \cdot F_1(p) + f_2(0) \cdot F_1(p)$.

Отсюда $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = F_1(p) \cdot [p \cdot F_2(p) - f_2(0)] + f_2(0) \cdot F_1(p)$.

Первое слагаемое есть произведение изображений, соответствующих оригиналам $f_2'(t)$ и $f_1(t)$. Используя свойства умножения изображений и линейности, можно записать

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq f_1'(t) \cdot f_2(t) + f_1(t) \cdot f_2(0).$$

Тогда $p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \doteq \int\limits_0^t f_1(\tau) \cdot f_2'(t-\tau)\,d\tau + f_1(t) \cdot f_2(0)$.◄

Пример. Найти оригинал, соответствующий изображению $F(p) = \dfrac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Решение. Поскольку

$$\frac{2p^2}{\left(p^2+1\right)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1},$$

$$\frac{1}{p^2+1} \doteq \sin t, \qquad \frac{p}{p^2+1} \doteq \cos t,$$

то на основании формулы Дюамеля имеем

$$2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \doteq 2\int\limits_0^t \cos\tau \cdot \cos(t-\tau)\,d\tau + 0 = t\cos t + \sin t.$$

2. Теоремы разложения.

Теорема 2 (1-я теорема разложения). *Если функция* $F(p)$ *в окрестности точки* $p = \infty$ *может быть представлена в виде ряда Лорана*

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k+1}} = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{p^2} + \frac{c_2}{p^3} + \dots,$$

то функция $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \dfrac{t^k}{k!} = c_0 + c_1 t + c_2 \cdot \dfrac{t^2}{2!} + \dots$, $t > 0$, *является оригиналом, имеющим изображение* $F(p)$:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k+1}} \doteq \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \frac{t^k}{k!} = f(t).$$

Без доказательства.

Пример. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$.

Решение. Запишем разложение в ряд Лорана функции данной в окрестности точки $p=\infty$:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{p^2}\right)}=\left[\left|\frac{1}{p^2}\right|<1\Rightarrow|p|>1\right]=$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-\ldots\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^5}-\ldots.$$

Следовательно,

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots=\cos t \text{ при } t>0.$$

Теорема 3 (2-я теорема разложения). *Если* $F(p)=\dfrac{P(p)}{Q(p)}$ – *рациональная правильная несократимая дробь, знаменатель которой* $Q(p)$ *имеет лишь простые корни* p_1, p_2, …, p_n, *то функция*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\cdot e^{p_k t}$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

► Разложим правильную рациональную дробь $\dfrac{P(p)}{Q(p)}$ на простейшие:

$$\frac{P(p)}{Q(p)}=\frac{c_1}{p-p_1}+\frac{c_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{c_n}{p-p_n},$$

где c_k, $k=1,2,..,n$, – неопределенные коэффициенты.

Для определения коэффициента c_1 умножим обе части этого разложения на $(p-p_1)$:

$$\frac{P(p)}{Q(p)}\cdot(p-p_1)=c_1+\left(\frac{c_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{c_n}{p-p_n}\right)\cdot(p-p_1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $p\to p_1$, получим

$$c_1=\lim_{p\to p_1}\frac{P(p)}{Q(p)}\cdot(p-p_1)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{p\to p_1}\frac{P(p)}{\dfrac{Q(p)-Q(p_1)}{p-p_1}}=\frac{P(p_1)}{Q'(p_1)}.$$

Аналогично находятся коэффициенты c_k, $k = 2,3..,n$.

Подставляя найденные значения в разложение функции $\frac{P(p)}{Q(p)}$, имеем

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P(p_1)}{Q^{'}(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \frac{P(p_2)}{Q^{'}(p_2)} \cdot \frac{1}{p - p_2} + \ldots + \frac{P(p_n)}{Q^{'}(p_n)} \cdot \frac{1}{p - p_n}.$$

Известно, что $\frac{1}{p - p_k} \doteq e^{p_k t}$, $k = 1,2,..,n$. На основании свойства линейности получим

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q^{'}(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k} \to \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q^{'}(p_k)} \cdot \mathrm{e}^{p_k t} = f(t). \blacktriangleleft$$

Замечания. 1. Дробь $\frac{P(p)}{Q(p)}$ должна быть правильной. В противном случае не выполняется необходимый признак существования изображения $\lim\limits_{p \to \infty} F(p) = 0$.

2. Видно, что коэффициенты c_k, $k = 1,2,..,n$ определяются как вычеты комплексной функции $F(p)$ в простых полюсах

$$c_k = \lim_{p \to p_k} \frac{P(p)}{Q^{'}(p)} = \operatorname*{Res}_{p = p_k} \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Вторую теорему разложения можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4 (3-я теорема разложения). *Если* $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ – *рациональная правильная несократимая дробь,* p_1, p_2, ..., p_n – *простые или кратные полюсы знаменателя* $Q(p)$, *то оригинал* $f(t)$, *соответствующий изображению* $F(p)$, *определяется формулой*

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} \doteq \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p = p_k} \left[\frac{P(p)}{Q(p)} \cdot e^{pt} \right] = f(t).$$

Без доказательства.

Пример. Найти оригинал $f(t)$ функции $F(p) = \frac{p - 1}{(p + 1)(p^2 + 4)}$.

Решение. Функция $F(p)$ правильная рациональная несократимая дробь. Корни знаменателя $Q(p)=(p+1)(p^2+4)$ есть $p_1=-1$, $p_2=-2i$, $p_3=2i$. Применим 2-ю теорему разложения. Очевидно, что $Q(p)=3p^2+2p+4$.

Тогда для $p_1=-1$ имеем

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_1=-1}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_1=-1}=-\frac{2}{5},$$

для $p_2=-2i$ имеем

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_2=-2i}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_2=-2i}=\frac{-1-2i}{-8-4i}=\frac{1+2i}{8+4i}=\frac{4+3i}{20},$$

для $p_3=2i$ имеем

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_3=2i}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_3=2i}=\frac{-1+2i}{-8+4i}=\frac{1-2i}{8-4i}=\frac{4-3i}{20}.$$

В итоге получим

$$f(t)=\frac{-2}{5}e^{-t}+\frac{4+3i}{20}e^{-2it}+\frac{4-3i}{20}e^{2it}=\frac{-2}{5}e^{-t}-\frac{2}{5}\cos 2t+\frac{3}{10}\sin 2t.$$

3. Обращение преобразования Лапласа.

Теорема 5 (формула Римана-Меллина). *Пусть функция* $f(t)$ *является оригиналом и имеет показатель роста* s_0*, а* $F(p)$ *– ее изображением. Тогда в любой точке* t*, где оригинал* $f(t)$ *непрерывен, справедлива формула Римана-Меллина*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp,$$

причем интегрирование производится вдоль любой прямой, интеграл понимается в смысле главного значения.

Без доказательства.

Определение 2. Формула Римана-Меллина

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

является обратной к формуле $F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ и называется ***обратным преобразованием Лапласа***.

Теорема 6. *Пусть* $F(p)$ *– функция комплексного переменного* p*, обладающая следующими свойствами:*

1) функция $F(p)$*, первоначально заданная в полуплоскости* $\operatorname{Re} p = u > s_0$ *и удовлетворяющая в ней условиям:*

а) $F(p)$ *– аналитическая функция в полуплоскости* $\operatorname{Re} p = u > s_0$*,*

б) в области $\operatorname{Re} p \geq u > s_0$ *функция* $F(p)$ *стремится к нулю при* $|p| \to \infty$ *равномерно относительно* $\arg(p - s_0)$*;*

в) для всех $\operatorname{Re} p = u$*,* $u > s_0$*, сходится несобственный интеграл*

$$\int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty} |F(p)| dp < M ,$$

где M *– некоторое положительное число, может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость* C_p*;*

2) аналитическое продолжение функции $F(p)$ *в полуплоскость* $\operatorname{Re} p \leq s_0$ *удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда имеет место следующее соотношение*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} \left[F(p) \cdot e^{pt} \right],$$

где $t > 0$ *и* $p = p_k$ *– особые точки (полюсы, существенно особые точки) функции, являющейся аналитическим продолжением* $F(p)$ *в полуплоскость* $\operatorname{Re} p \leq s_0$*,* $k = 1, 2, \ldots, n$.

Без доказательства.

Пример. Найти оригинал $f(t)$ функции $F(p) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

Решение. Аналитическим продолжением функции $F(p)$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re} p \leq s_0$ является функция $\dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, удовлетворяющая условиям леммы Жордана и имеющая две особые точки – полюсы первого порядка $p_1 = -i\omega$ и $p_2 = i\omega$. Поэтому при $\operatorname{Re} p = u \geq 0$ и $t > 0$ имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \frac{\omega}{p^2+\omega^2} e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2} e^{pt}\right] =$$

$$= \frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega} - \frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega} = \sin\omega t\,.$$

4. Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье. Пусть функция $f(t)$ является оригиналом и имеет конечное число экстремумов. Тогда для нее можно записать интеграл Фурье. При этом имеет место формула:

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega\,,$$

где $\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

Учитывая, что в интеграле Лапласа параметр $p = u + i\omega$, $\operatorname{Re} p = u$, и для сходимости интеграла выбирается $u > s_0$, а $f(t)\big|_{t<0} = 0$, можно записать

$$F(p) = F(u+i\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ut} e^{-i\omega t} dt\,.$$

Сравнивая полученный интеграл Лапласа с преобразованием Фурье, видно, что изображение $F(u+i\omega) = F(p)$ есть прямое преобразование Фурье для функции $g(t) = f(t)\cdot e^{-ut}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите формулу умножения изображений.
2. Что называется сверткой функций?
3. Запишите формулу Дюамеля.
4. В чем суть первой теоремы разложения?
5. Сформулируйте и докажите вторую теорему разложения.
6. В чем суть третьей теоремы разложения?
7. Запишите формулу Римана-Меллина?
8. Что называется обратным преобразованием Лапласа?

9. Как связаны между собой преобразование Лапласа и преобразование Фурье?

Лекция 3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений.
2. Применение операционного исчисления к решению систем дифференциальных уравнений.
3. Использование операционного исчисления в электротехнике.

1 Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений.

Постановка задачи*:* Требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

где c_0, $c_1, \ldots,$ c_{n-1} – заданные числа, функция $y(t)$ вместе с ее рассматриваемыми производными и функция $f(t)$ являются оригиналами.

Решение. Пусть $y(t) \doteq Y(p)$, $f(t) \doteq F(p)$. Пользуясь свойствами дифференцирования оригинала и линейности, перейдем от оригиналов к изображениям:

$$a_0\left(p^n Y - p^{n-1}c_0 - p^{n-2}c_1 - \ldots - c_{n-1}\right) + a_1\left(p^{n-1}Y - p^{n-2}c_0 - \ldots - c_{n-2}\right) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}(pY - c_0) + a_n Y = F$$

Разрешая это операторное уравнение относительно $Y(p)$, получим:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right)Y =$$
$$= c_0\left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) + c_1\left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) + \ldots +$$
$$+ c_{n-1}a_0 + F\ .$$

Положим

$$Q_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$R_{n-1}(p) = c_0\left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) + c_1\left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) +$$
$$+ \ldots + c_{n-1}a_0\ .$$

Тогда $Y(p) = \dfrac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}$.

Полученное решение называется ***операторным решением*** искомого дифференциального уравнения.

Определяя оригинал $y(t)$, соответствующий найденному изображению $Y(p)$, получаем искомое решение.

Замечания. **1.**Полученное решение $y(t)$ во многих случаях оказывается справедливым при всех $t \in \mathrm{R}$, а не только при $t \geq 0$.

2. При нулевых начальных условиях решение операторного уравнения примет вид

$$Y(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}.$$

Пример. Решить уравнение $y''' - y'' - 6y' = 0$ при начальных условиях $y(0) = 15$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 56$.

Решение. Имеем $y(t) \doteq Y(p)$. Тогда

$$y(t) \doteq p \cdot Y(p) - y(0) = pY(p) - 15,$$

$$y'(t) \doteq p^2 \cdot Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 15p - 2,$$

$$y'''(t) \doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - f''(0) =$$

$$= p^3 F(p) - 15p^2 - 2p - 56.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение и преобразовывая, получим

$$Y(p) = \frac{15(p^2 - p - 6) + 2(p-1) + 56}{p^3 - p^2 - 6p} = \frac{15p^2 - 13p - 36}{p(p+2)(p-3)} =$$

$$= \frac{6}{p} + \frac{5}{p+2} + \frac{4}{p-3}.$$

По таблице оригиналов находим

$$\frac{1}{p} \doteq 1, \ \frac{1}{p+2} \doteq e^{-2t}, \ \frac{1}{p-3} \doteq e^{3t}.$$

Тогда получаем

$$y(t) = 6 + 5\mathrm{e}^{-2t} + 4\mathrm{e}^{3t}.$$

2. Применение операционного исчисления к решению систем дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Требуется найти решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y_1' + a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n = f_1(t),$$

$$y_2' + a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n = f_2(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y_n' + a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n = f_n(t).$$

удовлетворяющее начальным условиям Коши

$$y_1(0) = c_1,\ y_2(0) = c_2,\ \ldots,\ y_n(0) = c_n,$$

где c_0, $c_1, \ldots$, c_{n-1} – заданные числа, функции $y_1(t)$, $y_2(t)$, …, $y_n(t)$ вместе со своими первыми производными и функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$ являются оригиналами.

Решение. Пусть $y_k(t) \doteq Y_k(p)$, $f_k(t) \doteq F_k(p)$, $k = 1,2,\ldots,n$. Применяя преобразование Лапласа к каждому уравнению системы и учитывая правила дифференцирования оригинала, получим

$$pY_1 - c_1 + a_{11}Y_1 + \ldots + a_{1n}Y_n = F_1(t),$$

$$pY_2 - c_2 + a_{21}Y_1 + \ldots + a_{2n}Y_n = F_2(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$pY_n - c_n + a_{n1}Y_1 + \ldots + a_{nn}Y_n = F_n(t),$$

или

$$(p + a_{11})Y_1 + a_{12}Y_2 \ldots + a_{1n}Y_n = c_1 + F_1(t),$$

$$a_{21}Y_1 + (p + a_{21})Y_1 + \ldots + a_{2n}Y_n = c_2 + F_2(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_{n1}Y_1 + a_{n2}Y_2 + \ldots + (p + a_{nn})Y_n = c_n + F_n(t).$$

Данная система называется ***системой операторных*** уравнений.

Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + p & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + p & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} + p \end{vmatrix}$$

есть определитель системы операторных уравнений и Δ_{km} – алгебраические дополнения элементов, находящихся на пересечении k-1 строки и m-го столбца. Если определитель $\Delta \neq 0$, то применяя правило Крамера, получим

$$Y_k(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (F_i(p) + c_i)\Delta_{km}}{\Delta},\ k = 1,2,\ldots,n.$$

Для нахождения решения исходной системы определяются оригиналы, соответствующие полученным изображениям.

Если определитель $\Delta = 0$, то система операторных уравнений решения не имеет, следовательно, и исходная система не имеет решения.

Пример. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$y' - 2y - 4z = \cos t,$$

$$z' + y + 2z = \sin t,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$ и $z(0) = 0$.

Решение. Пусть $y(t) \doteq Y(p)$ и $z(t) \doteq Z(p)$. Применяя преобразование Лапласа к данной системе, получим систему операторных уравнений

$$\begin{cases} (-2 + p)Y - 4Z = \dfrac{p}{p^2 + 1}, \\ Y + (2 + p)Z = \dfrac{1}{p^2 + 1}. \end{cases}$$

Определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 + p & -4 \\ 1 & 2 + p \end{vmatrix} = p^2.$$

Тогда решение относительно изображений есть

$$Y(p) = \frac{p^2 + 2p + 4}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{4}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{2p + 3}{p^2 + 1},$$

$$Z(p) = -\frac{2}{p^2(p^2 + 1)} = -\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2 + 1}.$$

Переходя от найденных изображений к оригиналам, получим при $t > 0$

$$y(t) = 4t + 2 - 2\cos t - 3\sin t,$$

$$z(t) = -2t + 2\sin t.$$

При помощи операционного исчисления можно находить решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, уравнениями в частных производных, уравнений в конечных разностях, проводить суммирование рядов. Вычислять интегралы. При этом решение этих и других задач значительно упрощается.

3. Использование операционного исчисления в электротехнике. Наибольшее применение в электротехнике операционное исчисление получило при исследовании переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами r, L и C, поскольку явления, происходящие в таких цепях, описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями и их системами, которые легко решаются с помощью операционного исчисления.

Переходным процессом называется явление, наблюдающееся в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому.

Переходные процессы возникают в электрических цепях в результате коммутаций (включения или выключения э. д. с, различных переключений, короткого замыкания в цепи, внезапного изменения параметров в цепи и т. д.). Эти процессы в электрических цепях всегда являются ***электромагнитными***. Они протекают обычно с очень большой скоростью и, как правило, заканчиваются по истечении долей секунды. При этом возможны случаи, когда напряжения и токи цепи или на отдельных ее элементах при переходном процессе значительно превосходят их значения в установившемся режиме. Последнее может привести к выходу из строя некоторых элементов цепи.

При протекании переходных процессов в электрических цепях всегда выполняются законы коммутации (законы переходных процессов).

А. Ток в индуктивности L не может измениться скачком. В начальный момент (непосредственно после коммутации) он сохраняет то значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0).$$

Б. Напряжение на емкости C не может измениться скачком. В начальный момент (непосредственно после коммутации) оно сохраняет то значение, которое было в момент, непосредственно предшествующий коммутации:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0).$$

Значения токов в индуктивностях и напряжений на обкладках конденсаторов в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации в цепи, $i_L(0)$ и $u_C(0)$, определяют начальные условия переходного процесса. При расчете переходного процесса в электрической цепи эти условия необходимо выявить до выполнения всех остальных вычислений. Если все $i_L(0)$ и $u_C(0)$ равны нулю, то в цепи имеют место нулевые начальные условия, а токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от нулевых значений. При ненулевых начальных условиях для определения знаков $i_L(0)$ и $u_C(0)$ надо задаться направлениями обхода контуров цепи, в которых будет происходить переходный процесс. Положительные знаки $i_L(0)$ и $u_C(0)$ сохранятся, если их направления совпадают с направлением обхода контура. В противном случае знаки $i_L(0)$ и $u_C(0)$ изменятся на противоположные. Здесь токи в индуктивностях и напряжения на конденсаторах в переходном процессе начнут изменяться от тех значений, которые они имели в момент, непосредственно предшествующий коммутации (с учетом установленных знаков соответствующих величин).

Пусть в электрической цепи, изображенной на рис. 56, рубильник P переключается из положения 1 в положение 2. Тогда в контуре r, L и C возникнет переходный процесс. Примем, что его начальные условия ненулевые: $i_L(0) \neq 0$ и $u_C(0) \neq 0$. При направлениях тока в индуктивности и напряжения на обкладках конденсатора в начальный момент переходного процесса, показанных на рис. 56, выбранном направлении обхода контура имеем $i_L(0) > 0$ и $u_C(0) > 0$.

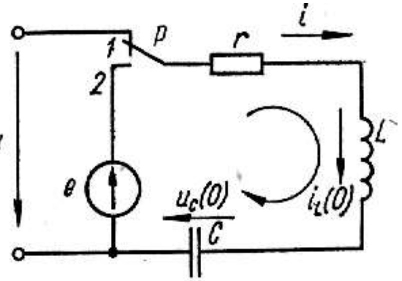


Рис.1.

Возьмем направление мгновенного значения тока переходного процесса $i = i(t)$, совпадающим с направлением обхода контура. Так как направление источника э. д. с. $e = e(t)$, действующего в контуре r, L и C во время переходного процесса, совпадает с направлением обхода этого контура, то по второму закону Кирхгофа получаем уравнение

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt + u_C(0) = e\,.$$

Обозначим

$i(p) = i \doteq I(p)$ - изображение тока переходного процесса в контуре;

$e(p) = e \doteq E(p)$ – изображение внешней э. д. с, действующей в контуре.

Тогда уравнение цепи r, L и C в операторной форме примет вид

$$rI(p) + L\big(pI(p) - i_L(0)\big) + \frac{1}{pC}I(p) + \frac{u_C(0)}{p} = E(p)\,.$$

Это уравнение можно записать так:

$$\left(r + Lp + \frac{1}{pC}\right)I(p) = E(p) + Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p}\,.$$

Откуда находится выражение для изображения тока переходного процесса в виде

$$I(p) = \frac{E(p) + Li_L(0) - \dfrac{u_C(0)}{p}}{r + Lp + \dfrac{1}{pC}}\,.$$

Полученная зависимость представляет собой закон Ома в операторной форме. Его можно записать так:

$$I(p) = \frac{F(p)}{Z(p)}\,,$$

где $F(p) = E(p) + Li_L(0) - \dfrac{u_C(0)}{p}$ – изображение всех (внешних и внутренних) э. д. с, действующих в контуре; $Z(p) = r + Lp + \dfrac{1}{pC}$ – операторное сопротивление контура r, L и C; $-\dfrac{u_C(0)}{p}$ – изображение начальной э. д. с. емкости (включая знак «минус»), уравновешивающей начальное напряжение на обкладках конденсатора и направленной навстречу $u_C(0)$.

Операторное сопротивление $Z(p)=r+Lp+\frac{1}{pC}$ контура r, L и C получено из выражения комплекса полного сопротивления этого контура

$$Z=r+i\omega L+\frac{1}{i\omega C}$$

путем замены $i\omega$ на p, $i^2=-1$.

Закон Ома в операторной форме позволяет, непосредственно исследовать переходные процессы только в неразветвленных электрических цепях. При рассмотрении переходных процессов в разветвленных и сложных электрических цепях необходимо использовать первый и второй законы Кирхгофа, которые имеют в операторной форме следующий вид:

первый закон – $\sum\limits_{k=1}^{n} I_k(p)=0$,

второй закон – $\sum\limits_{k=1}^{m} Z_k(p) I_k(p)=\sum\limits_{k=1}^{l} F_k(p)$

При составлении уравнений цепи по этим законам «правила знаков» остаются такими же, как и при расчете установившихся режимов в электрических цепях постоянного и переменного тока. В частности, если мгновенное значение тока переходного процесса $i_n(t)$ протекающего в ветви n, принято направленным к заданному узлу (для которого составляется уравнение по первому закону Кирхгофа), то изображение этого тока $I_n(p)$ берется с одним знаком (например, со знаком «плюс»). Если же ток $i_m(p)$ направлен от узла, то его изображение $I_m(p)$ берется с другим знаком (со знаком «минус»).

Составляя уравнения по второму закону Кирхгофа, необходимо учитывать, что кроме внешних э. д. с. $e_k(t)=e_k$ в контурах, содержащих индуктивности и емкости при ненулевых начальных условиях, действуют еще и внутренние э. д. с. (начальные э. д. с.: самоиндукции и емкости). Причем, если направление $i_{L_k}(0)$ совпадает с направлением обхода контура, то слагаемое $L_k i_{L_k}(0)$ следует брать со знаком «плюс», если же и $u_{C_k}(0)$ направлено по обходу контура, то результирующий знак слагаемого $\dfrac{u_{C_k}(0)}{p}$ должен быть «минус», так как начальная э. д. с. емкости всегда направлена навстречу начальному напряжению на обкладках конденсатора $u_C(0)$.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме имеют тот же вид, что и при установившихся режимах в цепях постоянного и переменного тока. Поэтому, применяя операционное исчисление для расчета переходных процессов, в принципе можно использовать все методы расчета сложных линейных электрических цепей с постоянными параметрами. При исследовании переходных процессов в сложных и разветвленных электрических цепях (в последнем случае при ненулевых начальных условиях) наибольшее применение получили метод уравнений Кирхгофа, метод контурных токов и метод наложения. При расчете переходных процессов в неразветвленных цепях, также в простых разветвленных цепях при нулевых начальных условиях применяется закон Ома в операторной форме. При этом в разветвленной цепи непосредственно определяется только ток переходного режима в ветви, содержащей источник э. д. с. (вся цепь нереально сводится к простой неразветвленной цепи).

Во всех случаях расчета переходных процессов в электрических цепях операторным методом сохраняется такая последовательность операций: сначала определяются начальные условия, затем записывается уравнение или система уравнений для заданной цепи в операторной форме, что позволяет найти изображения искомых токов или напряжений. По полученным изображениям отыскиваются оригиналы – мгновенные значения токов или напряжений переходного режима.

Применение операционного исчисления к расчету переходных процессов в линейных электрических цепях с сосредоточенными постоянными параметрами покажем на примерах.

Пример. Найти переходные значения тока и напряжений (i, u_r, u_C) в цепи, изображенной на рис.2., при переключении рубильника P из положения 1 в положение 2, если $U = 100$ В, $r = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ (рис.2).

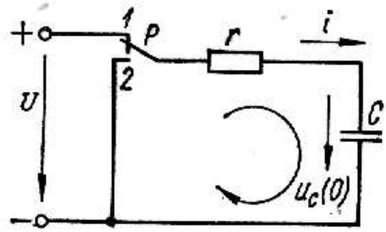
из положения 1 в положение 2 конденсатор C был заряжен до напряжения источника U. Если обход контура взять совпадающим с ходом стрелки часов, то начальное напряжение на конденсаторе $u_C(0)$ считается положительным: $u_C(0)=U=100$ В. Операторное сопротивление контура

$$Z(p)=r+\frac{1}{pC}.$$

Внешних источников э. д. с. в контуре нет.

Изображение внутренней э. д. с. (начальной э. д. с. емкости) есть

$$\frac{-u_C(0)}{p}=\frac{-U}{p}=F(p).$$



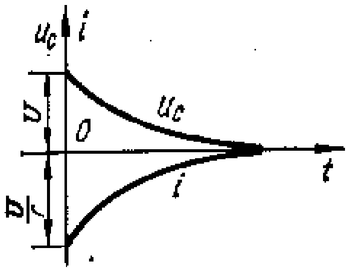


Рис.2. Рис.3.

Решение. Будем считать, что до переключения рубильника

По закону Ома в операторной форме имеем

$$I(p)=\frac{F(p)}{Z(p)}=\frac{\frac{-U}{p}}{r+\frac{1}{pC}}=\frac{-UC}{rCp+1}.$$

Изображение тока переходного процесса удовлетворяет условиям применения второй теоремы разложения. Поэтому можно записать

$$I(p)=\frac{-UC}{rCp+1}=\frac{P(p)}{Q(p)}$$

где $P(p)=-UC=-100\cdot 10\cdot 10^{-6}=-10^{-3}$, $Q(p)=rCp+1$,

$$\alpha_1=-\frac{1}{rC}=-\frac{1}{100\cdot 10\cdot 10^{-6}}=-10^{3},\ P(\alpha_1)=-10^{-3},$$

$$Q'(p)=rC=100\cdot 10\cdot 10^{-6}=10^{-3},\ Q'(\alpha_1)=10^{-3}.$$

В результате получаем мгновенное значение тока переходного процесса в виде

$$i = i(t) = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)} e^{\alpha_1 t} = \frac{-10^{-3}}{10^{-3}} e^{-10^3 t} = -e^{-1000\,t} \text{ А.}$$

Отрицательный знак тока означает, что при разряде конденсатора C через явное сопротивление r ток $i(t)$ направлен в сторону, противоположную направлению обхода контура, выбранного раньше, Мгновенное значение напряжения на активном сопротивлении в переходном процессе также отрицательно:

$$u_r = ri = -100\,e^{1000\,t} \text{ В.}$$

Мгновенное значение переходного напряжения на конденсаторе, определяемое по второму закону Кирхгофа $u_C + ri = 0$ есть

$$u_C = -ri = -u_r = 100\,e^{-1000\,t} \text{ В.}$$

Характер изменения i и u_C в переходном режиме показан на рисунке 3.

Вопросы для самоконтроля

1. Как используется преобразование Лапласа при решении линейных дифференциальных уравнений?

2. Как используется преобразование Лапласа при решении систем линейных дифференциальных уравнений?

3. При исследовании каких процессов используется операционное исчисление в электротехнике?

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика. Специальные главы: Пособие для студентов вузов / П.И.Чинаев, Н.А.Минин, А.Ю.Перевозников, А.А.Черенков – Киев: Вища школа, 1981.

2. Математический анализ (специальные разделы).Ч.1. Общие функциональные ряды и их приложения: Учебное пособие для втузов. – М.: Высш.школа,1980.

3. Краснов м.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие. – М.: наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1981.

4. Пчелин Б.К. Специальные разделы высшей математики: Учебное пособие для втузов. – М.: Высшая математика, 1973.

5. Сидоров Ю.В., федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного: Учеб. Для вузов. – 3-е изд., испр. – М.:Наука, 1989.

6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

Учебное издание

Марченко Лариса Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тексты лекций для студентов физического факультета

В пяти частях

Часть пятая

Теория функций комплексной переменной

В авторской редакции

Подписано в печать 26.10.2006. (66) Бумага писчая №1. Формат 60х84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr. Усл.п.л. _____. Уч.изд.л. _____. Тираж 25 экз.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104